МОДЕЛИРОВАНИЕ ОТНОСИТЕЛЬНЫХ ДВИЖЕНИЙ В КЛАССИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ

1.1. ВВЕДЕНИЕ

В классической механике, для описания механических явлений, в качестве первого шага необходимо выбрать ту или иную систему отсчета. В различных системах отсчета законы движения имеют, вообще говоря, различный вид. Если взять произвольную систему отсчета, то может оказаться, что законы движения даже простых явлений будут выглядеть весьма сложно. Для нахождения траекторий относительных движений в классической механике используется предположение об абсолютности времени во всех системах отсчета (как инерциальных, так и неинерциальных). Используя данное предположение, рассмотрим движение одной и той же точки в двух различных системах отсчета K и K', из которых вторая движется относительно первой с произвольной скоростью $\vec{V}(t) = \frac{d}{dt}\vec{R}(t)$ ($\vec{R}(t)$ — радиус-вектор, описывающий положение точки начала системы координат K' относительно системы отсчета K). Будем описывать движение точки в системе K' радиусом-вектором $\frac{d}{dt}\vec{r}(t)$, направленным из начала координат системы K' в текущее положение точки. Тогда движение рассматриваемой точки относительно системы отсчета K описывается радиусом-вектором $\vec{r}(t)$:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}\,'(t) + \vec{R}(t), \tag{1.1}$$

а относительная скорость $\vec{v}(t)$

$$\vec{v}(t) = \frac{d}{dt}\vec{r}(t) = \frac{d}{dt}\vec{r}\,'(t) + \frac{d}{dt}\vec{R}(t), \tag{1.2}$$

где $\frac{d}{dt}\vec{r}\,'(t)$ — скорость точки относительно системы отсчета K', $\frac{d}{dt}\vec{R}(t)$ — скорость движения системы отчета K' относительно системы отсчета K (рис. 1.1).

Таким образом, для нахождения закона движения точки в произвольной системе отсчета K необходимо:

1) задать закон движения точки относительно системы отсчета K' (функцию $\vec{r}\,'(t)$);

2) задать закон движения системы отсчета K' относительно системы отсчета K (функцию $\vec{R}(t)$);

3) определить закон движения точки относительно системы отсчета K в соответствии с (1.1).

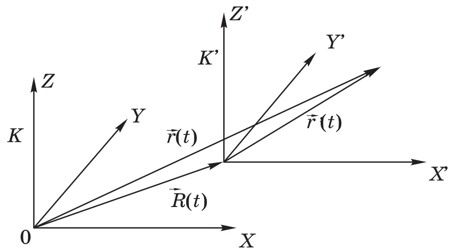

Рис. 1.1. К постановке задачи об описании относительных движений

Возможна другая постановка данной задачи, в которой по известному закону движения материальной точки $\vec{r}(t)$ относительно некоторой системы отсчета K и по известному закону движения $\vec{R}(t)$ системы отсчета K' относительно системы отсчета K требуется найти закон движения $\vec{r}\,'(t)$ материальной точки в системе отсчета K'. Очевидно, что решение задачи в такой постановке дается следующими формулами:

$$\vec{r}\,'(t) = \vec{r}(t) - \vec{R}(t), \tag{1.3}$$

$$\vec{v}\,'(t) = \frac{d}{dt}\vec{r}(t) - \frac{d}{dt}\vec{R}(t). \tag{1.4}$$

Несмотря на то что решение задачи о нахождении траектории относительного движения исчерпывается формулами (1.1)–(1.4), построение конкретных траекторий движения без использования ПК может вызвать определенные трудности, а в ряде случаев привести к неправильным результатам. Ниже мы рассмотрим две поучительные, на наш взгляд, задачи, соответствующие обеим постановкам

1.2. ПОСТРОЕНИЕ ОРБИТЫ ЛУНЫ В ГЕЛИОЦЕНТРИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ ОТСЧЕТА

С точки зрения кинематического подхода эта задача соответствует первой постановке задачи об относительном движении. В гелиоцентрической системе отсчета (система K) Земля движется по окружности радиуса $R_1 = 1,496 \cdot 10^8$ *км* (период обращения $T_1 = 3,156 \cdot 10^7$ *с*). Луна в свою очередь движется вокруг Земли (система K) по окружности радиуса $R_2 = 3,844 \cdot 10^5$ *км* (период обращения $T_2 = 2,36 \cdot 10^6$ *с*). Как известно [1, 2], при движении материальной точки по окружности радиуса R с постоянной угловой скоростью w координаты радиуса-вектора, проведенного из начала координат к текущему положению точки, меняются по закону

$$\vec{R}(t) = \begin{pmatrix} R\cos(\omega\, t + \varphi_0) \\ R\sin(\omega\, t + \varphi_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R\cos\left(\frac{2\pi}{T}t + \varphi_0\right) \\ R\sin\left(\frac{2\pi}{T}t + \varphi_0\right) \end{pmatrix}, \tag{1.5}$$

где φ_0 — начальная фаза, характеризующая положение частицы в момент времени $t = 0$, которую в дальнейшем мы будем полагать равной нулю. Заменяя в (1.5) R на R_1, R_2 и подставляя в (1.1), получаем зависимость радиуса-вектора Луны в гелиоцентрической системе координат от времени:

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_2 \cos\left(\frac{2\pi}{T_2} t\right) + R_1 \cos\left(\frac{2\pi}{T_1} t\right) \\ R_2 \sin\left(\frac{2\pi}{T_2} t\right) + R_1 \sin\left(\frac{2\pi}{T_1} t\right) \end{pmatrix}. \tag{1.6}$$

Выражение (1.6) задает орбиту Луны $y = y(x(t))$ в параметрической форме, где параметром является время.

```
>>  R1=1.496*10^8; % задание численного значения
                   % радиуса орбиты Земли
>>  T1=3.156*10^7; % задание численного значения периода
                   % обращения Земли вокруг Солнца
>>  R2=3.844*10^5; % задание численного значения
                   % радиуса орбиты Луны
>>  T2=2.360*10^6; % задание численного значения
                   % периода обращения Земли  вокруг Земли
>>  t=0:T1/1000:T1; % задание дискретной переменной,
                    % изменяющейся от 0 до T1 с шагом T1/1000
>>  Xz=R1*cos(2*pi*t/T1); % вычисление x-й координаты
                          % радиуса-вектора Земли
>>  Yz=R1*sin(2*pi*t/T1); % вычисление y-й координаты
                          % радиуса-вектора Земли
>>  Xm=R2*cos(2*pi*t/T2); % вычисление x-й координаты
                          % радиуса-вектора Луны
                          % в системе координат, связанной с Землей
>>  Ym=R2*sin(2*pi*t/T2); % вычисление y-й координаты
                          % радиуса-вектора Луны
                          % в системе координат, связанной с Землей
>>  Xotn=Xz+Xm; % вычисление x-й координаты
                % радиуса-вектора Луны
                % в гелиоцентрической системе координат
>>  Yotn=Yz+Ym; % вычисление y-й координаты
                % радиуса-вектора Луны
                % в гелиоцентрической системе координат
>>  plot(Xotn,Yotn); % визуализация орбиты Луны в гелиоцентрической
                     % системе координат (рис. (1.2))
```

```
>>   hf = gcf();            // загрузка дискриптора графического окна
>>   hf.axes_size=[600,600]; // задание режима отображения
                                          пропорциональных отрезков по
                                          обеим координатным  осям
```

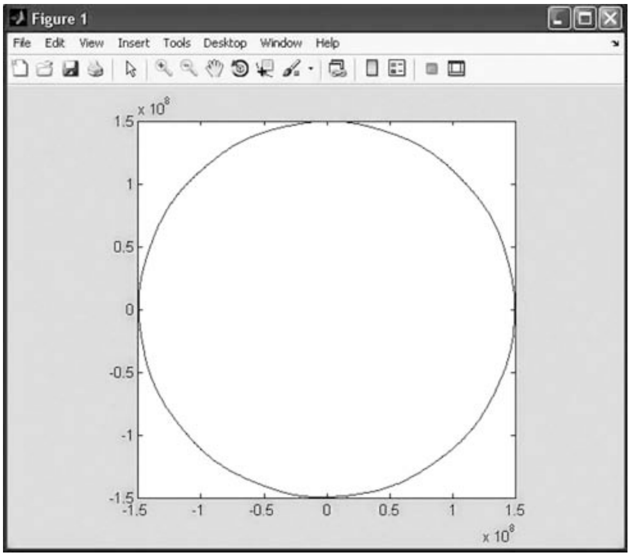

Рис. 1.2. Орбита Луны в гелиоцентрической системе координат.

Вопрос: *Соответствует ли вид орбиты, представленной на рис. 1.2, орбите, ранее построенной вами?*

Для отображения на одном графике орбиты Земли и орбиты Луны в гелиоцентрической системе координат следует вместо команды

```
>> plot(Xotn,Yont)
```

ввести команду

```
>> plot(Xotn,Yont,Xz,Yz)
```

Фрагмент траекторий Земли и Луны в гелиоцентрической системе координат представлен на рис. 1.3.

Для получения информации о всех активных переменных, находящихся в памяти компьютера (рабочей области) в данный момент времени, используется команда `whos`. На рис. 1.4 показана информация, выведенная данной командой на монитор компьютера, после выполнения описанной выше последовательности команд.

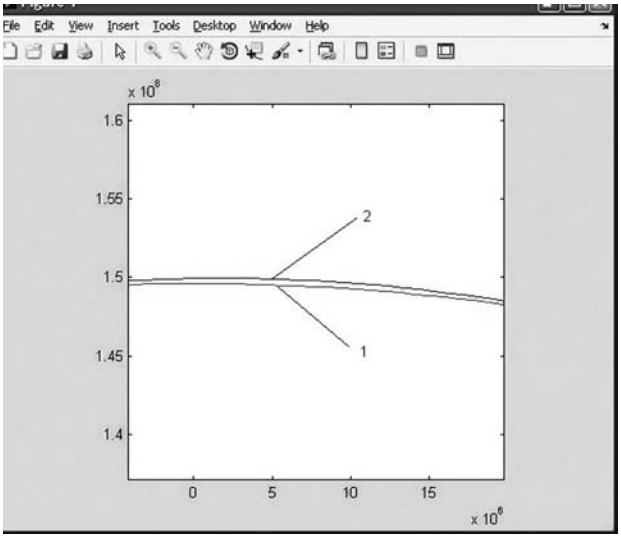

Рис. 1.3. Фрагмент траекторий движения Луны (1) и Земли (2) в гелиоцентрической системе координат

```
>> whos
 Name      Size       Bytes   Class

 R1        1x1        8       double array
 R2        1x1        8       double array
 T1        1x1        8       double array
 T2        1x1        8       double array
 Xm        1x1001     8008    double array
 Xotn      1x1001     8008    double array
 Xz        1x1001     8008    double array
 Ym        1x1001     8008    double array
 Yont      1x1001     8008    double array
 Yz        1x1001     8008    double array
 ans       0x0        0       char array
 t         1x1001     8008    double array

 Grand total is 7011 elements using 56088  bytes
```

Рис. 1.4. Получение информации об активных переменных, находящихся в памяти компьютера после выполнения описанной последовательности команд

Приведенный выше протокол команд можно сохранить в виде файла на диске для последующего анализа решения или использования, как основы программы сценария, используемой при решении подобных задач

Созданный нами документ позволяет расширить задачу и посмотреть, какой будет орбита Луны при различных значениях радиуса орбиты Луны и периода обращения. Например, на рис. 1.5 представлена орбита Луны в гелиоцентрической системе координат при $r = 3,844 \cdot 10^7$ *км*. Сравнивая орбиты Луны, представленные на рис. 1.2 и 1.5, обнаруживаем их существенные отличия. Для объяснения причины этих отличий необходимо сравнить линейные скорости движения Луны в первом и во втором случаях и линейную скорость движения Земли.

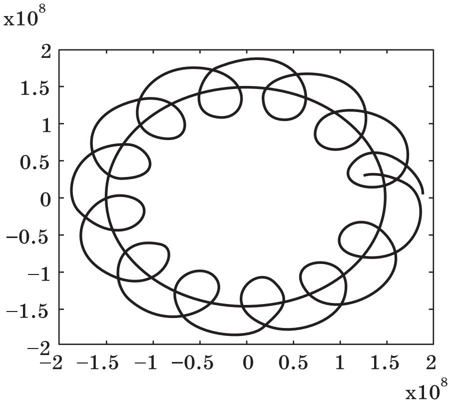

Рис. 1.5. Орбита Луны в гелиоцентрической системе координат при $r = 3,844 \cdot 10^7$ *км*

Так как направление линейной скорости движения Земли относительно Солнца и направление линейной скорости движения Луны относительно Земли меняются во времени, и при этом по величине эти скорости остаются постоянными, в качестве количественной характеристики соотношения линейных скоростей движения Луны и Земли в гелиоцентрической системе координат следует выбрать разность между модулем линейной скорости движения Земли и проекцией линейной скорости Луны на направление вектора линейной скорости Земли:

$$v(t) = \left|\vec{V}(t)\right| - \frac{\left(\vec{V}(t)\vec{v}(t)\right)}{\left|\vec{V}(t)\right|}, \qquad (1.7)$$

где $\vec{V}(t) = \begin{pmatrix} dX(t)/dt \\ dY(t)/dt \end{pmatrix}$ — вектор скорости движения Земли относительно Солнца, $\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} dx(t)/dt \\ dy(t)/dt \end{pmatrix}$ — вектор скорости Луны относительно Земли.

Для визуализации искомой зависимости необходимо выполнить следующую последовательность команд

```
>>  R1=1.496*10^8; % задание численного значения
                   % радиуса орбиты Земли
>>  T1=3.156*10^7; % задание численного значения
                   % периода обращения Земли вокруг Солнца
>>  R2=3.844*10^5; % задание численного значения
                   % радиуса орбиты Луны
>>  T2=2.360*10^6; % задание численного значения
                   % периода обращения Луны вокруг Земли
>>  dt=T1/2000; % задание шага по времени
>>  t=0:dt:T1; % задание дискретной переменной,
               % изменяющейся от 0 до T1 с шагом T1/2000
>>  Xz=R1*cos(2*pi*t/T1); % вычисление x-й координаты
                          % радиуса-вектора Земли
>>  Yz=R1*sin(2*pi*t/T1); % вычисление y-й координаты
                          % радиуса-вектора Земли
>>  Xm=R2*cos(2*pi*t/T2); % вычисление x-й координаты
                          % радиуса-вектора Луны
                          % в системе координат, связанной с Землей
>>  Ym=R2*sin(2*pi*t/T2); % вычисление y-й координаты
                          % радиуса-вектора Луны
                          % в системе координат, связанной с Землей
```

```
>>  Xotn=Xz+Xm; % вычисление x-й координаты
                % радиуса-вектора Луны
                % в гелиоцентрической системе координат
>>  Yotn=Yz+Ym; % вычисление y-й координаты
                % радиуса-вектора Луны
                % в гелиоцентрической системе координат
>>  Vx=diff(Xz)/dt; % вычисление значений проекции
                    % скорости движения Земли на ось OX
                    % в гелиоцентрической системе координат
>>  Vy=diff(Yz)/dt; % вычисление значений проекции
                    % скорости движения Земли на ось OY
                    % в гелиоцентрической системе координат
>>  vx=diff(Xm)/dt; % вычисление значений проекций
                    % скорости движения Луны на ось OX
                    % в системе координат, связанной с Землей
>>  vy=diff(Ym)/dt; % вычисление значений проекций
                    % скорости движения Луны на ось OY
                    % в системе координат, связанной с Землей
>>  V=(Vx.^2+Vy.^2).^0.5...
        -(Vx.*vx+Vy.*vy)./(Vx.^2+Vy.^2).^0.5; % вычисление
                                              % значений
                                              % функции,
                                              % задаваемой
                                              % выражением (1.7)
>>  t1=0:dt:T1-dt;
>>  subplot(2,1,1); plot(Xz,Yz,Xotn,Yotn); % построение траектории
                                           % движения Луны и
                                           % траектории движения
                                           % Земли
                                           % в гелиоцентрической
                                           % системе координат
>>  subplot(2,1,2); plot(t1,V); % построение графика функции,
                                % задаваемой выражением (1.7)
```

Результаты выполнения приведенной выше последовательности команд представлены на рис. 1.6 ($R2 = 3,844 \cdot 10^7$ *км*), рис. 1.7 ($R2 = 3,844 \cdot 10^5$ *км*).

Анализ зависимостей $v_{otn}(t)$, представленных на рис. 1.6–1.7, позволяет объяснить причину отличий орбит. Функция $D(t)$ при $R2 = 3,844 \cdot 10^5$ *км* всегда положительна, то есть Луна всегда движется в направлении движения Земли и петли не образуются. При $R2 = 3,844 \cdot 10^7$ *км* величина $D(t)$ принимает отрицательные значения, то есть существуют моменты времени, в которые Луна движется в направлении противоположном направлению движения Земли, а потому орбита имеет петли.

В заключение сделаем ряд замечаний по поводу некоторых операторов и функций, использованных в данном разделе. Обратите внимание на способ задания дискретных переменных (векторов) `t`, `t1`. Здесь мы использовали знак `:`, являющийся одним из важнейших синтаксических знаков   Этот знак, поставленный между двумя

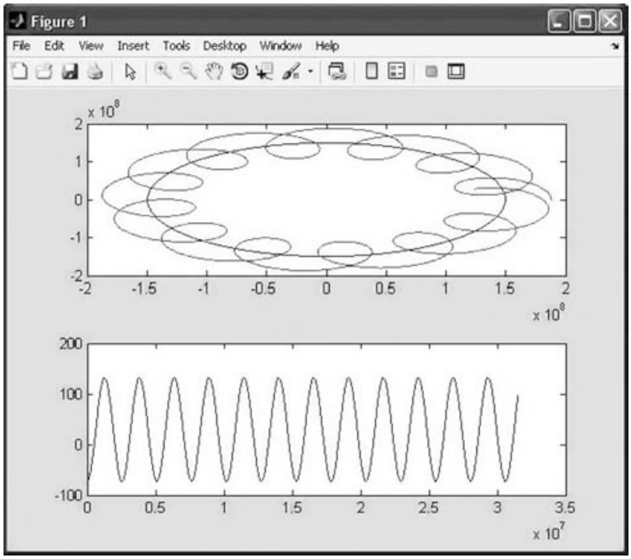

Рис. 1.6. Траектория движения Луны в гелиоцентрической системе координат при $R2 = 3,844 \cdot 10^7$ *км* (верхняя зависимость), зависимость мгновенных значений разностей между модулем скорости Земли и проекцией скорости движения Луны на направление скорости движения Земли.

числами, задает вектор, компоненты которого принимают значения от меньшего числа до большего с шагом 1. Например, оператор `x = 0:9` задает целочисленный вектор `x = [0,1,2,3,4,5,6,7,8,9]`. Отметим, что пакет также допускается явное задание вектора с помощью квадратных скобок. Если шаг изменения дискретной переменной отличается от единиц, то при ее определении следует указывать значение шага, аналогично тому как это было сделано выше в программах, приведенных в настоящем разделе.

При обращении к функции, например, `y=cos(x)`, где x — вектор, значение которого определены выше, пакет проводит вычисления для каждого элемента вектора аргумента и присваивает их соответствующим компонентам вновь создаваемого вектора. Для построения двух графиков на одном чертеже были использованы команда `subplot(2,1,1)`, `subplot(2,1,2)`, позволившие разбить графическое окно на две отдельные части. В общем случае команда обращения к данной команде имеет следующий вид: `subplot(m,n,p)` или `subplot(m n p)`. Здесь значение `m` указывает, на сколько частей разбивается окно по вертикали, `n` указывает, на сколько частей окно разбивается по горизонтали, `p` — порядковый номер подокна, считая слева направо и сверху вниз. Команда `subplot( )` используется как для создания нового подокна, так и для перехода от одного подокна к другому. После вызова данной команды команда `plot( )` график и/или графики в соответствующем подокне.

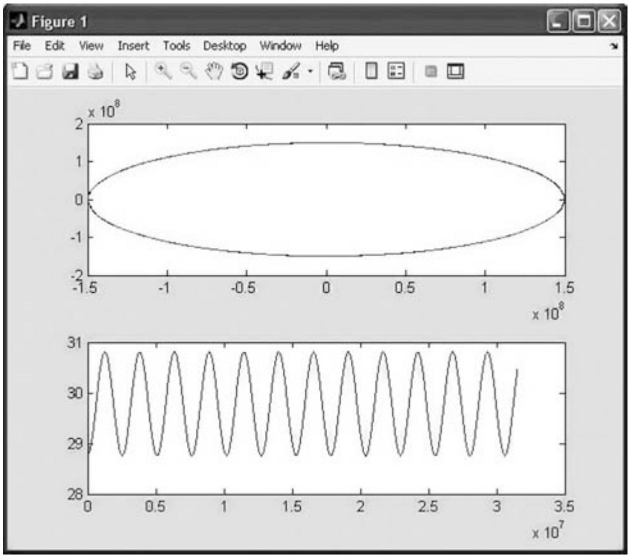

Рис. 1.7. Траектория движения Луны в гелиоцентрической системе координат при $R2 = 3,844 \cdot 10^5$ *км* (верхний рисунок), зависимость мгновенных значений разностей между модулем скорости Земли и проекцией скорости движения Луны на направление скорости движения Земли (нижний рисунок)

***Задача* 1.1**

1. *Определите предельное значение радиуса орбиты Луны, при котором не происходит появление петель. Как выглядит орбита Луны в гелиоцентрической системе координат в этом случае?*
2. *Зафиксируйте радиус орбиты Луны и постройте орбиту Луны при различных значениях периода обращения. Что можно сказать о размере петель в этом случае?*

1.3. ПОСТРОЕНИЕ ОРБИТЫ МАРСА В СИСТЕМЕ ОТСЧЕТА, СВЯЗАННОЙ С ЗЕМЛЕЙ

С точки зрения кинематического подхода эта задача соответствует второй постановке задаче об относительном движении. В гелиоцентрической системе отсчета (система K) Земля движется по окружности радиуса $R_1 = 1,496 \cdot 10^8$ *км*, период обращения $T_1 = 365,2$ *суток*, Марс двигается по эллипсу, большая полуось которого $a_M = 2,2 \cdot 10^8$ *км*, период обращения Марса $T_M = 689,98$ *суток*, эксцентриситет орбиты $= 0,093$ [3]. Движение Земли описывается радиусом-вектором $R(t)$, координаты которого вычисляются в соответствии с (1.5). В связи с тем, что орбита Марса является эллипсом зависимости $x = x(t)$, $y = y(t)$ от времени задаются параметрически [4]:

$$x(\xi) = a_M(\cos\xi - e), \tag{1.8}$$

$$y(\xi) = a_M \sqrt{1 - e^2} \sin \xi, \tag{1.9}$$

$$t(\xi) = \frac{T_M}{2 \cdot \pi} (\xi - e \cdot \sin \xi). \tag{1.10}$$

Полному обороту по эллипсу соответствует изменение параметра ξ от 0 до 2π.

Для построения орбиты Марса необходимо вычислить в одни и те же моменты времени координаты радиусов-векторов, описывающих положение Земли и Марса в гелиоцентрической системе отсчета, затем в соответствии с (1.3) вычислить координаты Марса в системе отсчета, связанной с Землей. Запишем эту последовательность действий более четко в виде вычислительного алгоритма:

1. Задание интервала изменения параметра ξ.
2. Разбиение интервала изменения параметра ξ на N последовательных интервалов.
3. Вычисление для каждого значения переменной ξ соответствующих значений времени и координат орбиты Марса x, y согласно (1.10), (1.8), (1.9).
4. Вычисление для каждого значения времени координат Земли в соответствии с (1.5).
5. Вычисление для каждого значения времени координат орбиты Марса в системе отсчета, связанной с Землей.
6. Построение орбиты Марса в системе отсчета, связанной с Землей.

```
>>  R1=1.496*10^8; % задание радиуса орбиты Земли
>>  T1=365.24;  % задание периода обращения
                % Земли вокруг Солнца в сутках
>>  Am=2.28*10^8; % задание радиуса орбиты Марса
>>  Tm=689.98; % задание периода обращения Марса
               % вокруг Солнца в сутках
>>  E=0.093; % эксцентриситет орбиты Марса
>>  Np=1000; % число точек на один оборот Марса
             % вокруг Солнца
>> dksi=(2*pi)/Np;  %  вычисление шага
                    %  изменения переменной ksi
>>  ksi=0:dksi:2*pi; % вычисление значений
                     % координат вектора ksi
>>  T=Tm/(2*pi)*(ksi-E*sin(ksi)); % вычисление значений
                                  % координат вектора
                                  % по формуле (1.10))
>>  Xm=Am*(cos(ksi)-E); % вычисление мгновенных
                        % значений проекции
                        % радиуса-вектора Марса
                        % на ось OX (формула (1.8))
```

```
>>  Ym=Am*((1-E.^2).^0.5)*sin(ksi); % вычисление
                                    % мгновенных значений проекции
                                    % радиуса-вектора Марса
                                    % на ось OY (формула (1.9))
>>  Xz=R1*cos(2*pi*T/T1); % вычисление мгновенных
                          % значений проекции
                          % радиуса-вектора Земли на ось OX
>>  Yz=R1*sin(2*pi*T/T1); % вычисление мгновенных
                          % значений проекции
                          % радиуса-вектора Земли на ось OY
>>  plot(Xz,Yz,Xm,Ym) % визуализация траекторий
                      % Земли и Марса
                      % в гелиоцентрической системе координат
```

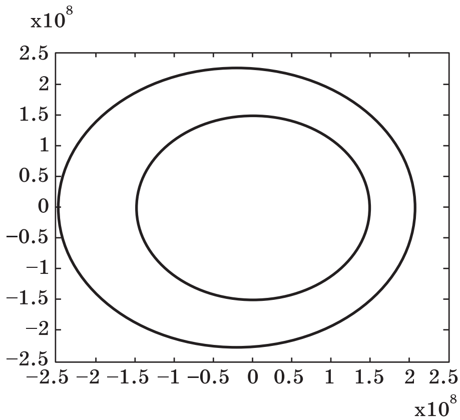

Рис. 1.8. Орбиты Марса и Земли в гелиоцентрической системе координат

Результаты выполнения приведенной выше последовательности команд представлены на рис. 1.8. Для построения орбиты Марса в системе координат, связанной с Землей, необходимо выполнить следующую последовательность команд

```
>>  R1=1.496*10^8;  % задание радиуса орбиты Земли
>>  T1=365.24;  % задание периода обращения Земли
                % вокруг Солнца в сутках
>>  Am=2.28*10^8; % задание радиуса орбиты Марса
>>  Tm=689.98; % задание периода обращения Марса
               % вокруг Солнца в сутках
>>  E=0.093; % эксцентриситет орбиты Марса
>>  Np=1000; % число точек на один оборот Марса
             % вокруг Солнца
>>  K=9;  % число оборотов Марса вокруг Солнца
```

```
>>  dksi=(2*pi)/Np*K;  % вычисление шага dksi
                      % изменения переменной
>>  ksi=0:dksi:2*pi*K; % вычисление значений
                       % координат вектора
>>  T=Tm/(2*pi)*(ksi-E*sin(ksi)); % вычисление значений координат
                                  % вектора T по формуле (1.10)
>>  Xm=Am*(cos(ksi)-E); % вычисление мгновенных значений проекции
                        % радиуса-вектора Марса
                        % на ось oX по формуле (1.8)
>>  Ym=Am*((1-E.^2).^0.5)*sin(ksi); % вычисление мгновенных
                                    % значений проекции
                                    % радиуса-вектора Марса
                                    % на ось OY по формуле (1.9)
>>  Xz=R1*cos(2*pi*T/T1); % вычисление мгновенных
                          % значений проекции
                          % радиуса-вектора Земли на ось OX
>>  Yz=R1*sin(2*pi*T/T1); % вычисление мгновенных
                          % значений проекции
                          % радиуса-вектора Земли на ось OY
>>  Xotn=Xm-Xz; % вычисление мгновенных значений проекции
                % радиуса-вектора Марса на ось OX
                % в системе координат, связанной с Землей
>>  Yotn=Ym-Yz; % вычисление мгновенных значений
                % проекции радиуса-вектора Марса
                % на ось oY в системе координат,
                % связанной с Землей
>>  plot(Xotn,Yotn,...             % визуализация орбиты Марса
           Xotn(1),Yotn(1),...     % визуализация начального
                                   % положения Марса
            'ks',...          % режим рисования одних маркеров
            'MarkerEdgeColor','b',...  % задание цвета
                                       % границы маркера
            'MarkerFaceColor','g',... % задание цвета
                                      % закраски маркера
            'MarkerSize',5); % задание размера маркера
```

Результаты выполнения приведенной выше последовательности команд представлены на рис. 1.9. имеется возможность продемонстрировать движение Марса в системе координат, связанной с Землей, в динамике. Для этого достаточно заменить команду `plot( )` командой `comet(Xotn,Yotn)`.

Еще одной важной характеристикой движения Марса (в первую очередь для межпланетных космических полетов) является расстояние между Землей и Марсом $s(t)$, которое определяется модулем радиуса-вектора, описывающего положение Марса в системе отсчета, связанной с Землей. Для построения данной зависимости следует выполнить следующую последовательность команд

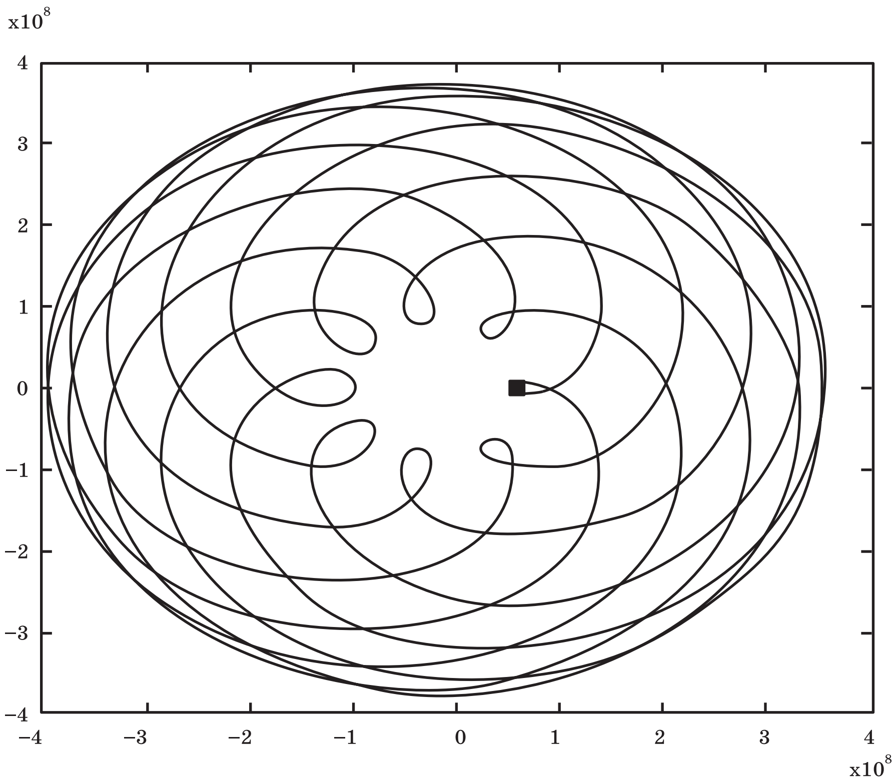

Рис. 1.9. Траектория движения Марса в системе координат, связанной с Землей

```
>>  R1=1.496*10^8;  % задание радиуса орбиты Земли
>>  T1=365.24;  % задание периода обращения Земли
                % вокруг Солнца в сутках
>>  Am=2.28*10^8; % задание радиуса орбиты Марса
>>  Tm=689.98; % задание периода обращения Марса
               % вокруг Солнца в сутках
>>  E=0.093; % эксцентриситет орбиты Марса
>>  Np=1000; % число точек на один оборот
             % Марса вокруг Солнца
>>  K=9;  % число оборотов Марса вокруг Солнца
>>  dksi=(2*pi)/Np*K;  % вычисление шага dksi
                       % изменения переменной ksi
>>  ksi=0:dksi:2*pi*K; % вычисление значений
                        % координат вектора ksi
>>  T=Tm/(2*pi)*(ksi-E*sin(ksi)); % вычисление значений
                                   % координат вектора T
                                   % по формуле (1.10)
>>  Xm=Am*(cos(ksi)-E); % вычисление мгновенных
```

```
                        % значений проекции
                        % радиуса-вектора Марса
                        % на ось oX по формуле (1.8)
>>  Ym=Am*((1-E.^2).^0.5)*sin(ksi); % вычисление
                                    % мгновенных значений
                                    % проекции радиуса-вектора
                                    % Марса на ось oY
                                    % по формуле(1.9)
>>  Xz=R1*cos(2*pi*T/T1); % вычисление мгновенных значений
                          % проекции радиуса-вектора Земли
                          % на ось OX
>>  Yz=R1*sin(2*pi*T/T1); % вычисление мгновенных значений
                          % проекции радиуса-вектора Земли
                          % на ось OY
>>  Xotn=Xm-Xz; % вычисление мгновенных значений проекции
                % радиуса-вектора Марса на ось OX
                % в системе координат, связанной с Землей
>>  Yotn=Ym-Yz; % вычисление мгновенных значений проекции
                % радиуса-вектора Марса на ось OY
                % в системе координат, связанной с Землей
>>  R=(Xotn.^2+Yotn.^2).^0.5; % вычисление мгновенных значений
                              % расстояния между Землей
                              % и Марсом
>>  plot(T,R) % визуализация зависимости расстояния
              % между Землей и Марсом
              % от времени
```

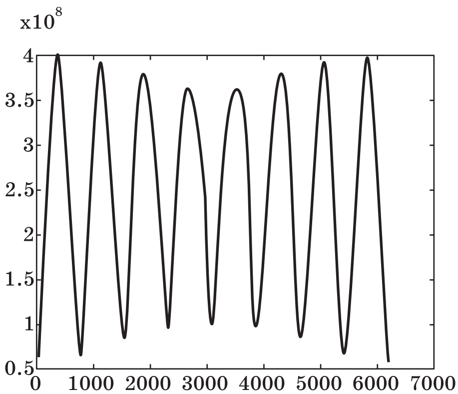

Рис. 1.10. Зависимость расстояния между Землей и Марсом от времени, измеряемого в земных сутках

Результаты выполнения приведенной последовательности команд представлены на рис. 1.10.

Анализ зависимости, представленной на рис. 1.10, показывает, что расстояние между Землей и Марсом является сложной периодической функцией времени. Если воспользоваться терминологией теории сигналов [5], то о зависимости $s(t)$ можно сказать, что она представляет собой амплитудно-модулированный сигнал, который принято представлять в виде произведения двух функций — высокочастотной (несущей) и низкочастотной функции, задающей амплитудную модуляцию (огибающей):

$$u(t) = (\overline{u} + a\sin(\omega_1 t)) \cdot (1 + \Delta a \sin(\omega_2 t)), \tag{1.11}$$

где $\overline{u}$ — постоянная составляющая функции $u(t)$; a — амплитуда сигнала; ω_1 — частота несущей; Δa — амплитуда функции, задающая глубину амплитудной модуляции, ω_2 — частота модулирующей функции.

Из рис. 1.10 видно, что период несущей составляет $T_1 = 2\pi/\omega_1 \approx 2$ года, период модулирующей функции $T_2 = 2\pi/\omega_2 \approx 17$ лет. Наличие функции в функции $s(t)$ периодической составляющей с периодом ≈ 2 года вполне ожидаемо. Действительно, в первом приближении орбиту Марса можно рассматривать как окружность, поэтому функция $s(t)$ принимает следующий вид:

$$s(t) = \sqrt{R_M^2 + R1^2 - 2R_M R1 \cos\left[2\pi\left(\frac{T_M - T1}{T_M T1}\right)t\right]}. \tag{1.12}$$

Из (1.12) видно, что функция $s(t)$ является периодической, период функции $s(t)$

$$T_S = \frac{T_M T1}{T_M - T1}, \tag{1.13}$$

Поэтому в качестве единицы измерения периода функция $s(t)$ наиболее удобно выбрать земной год. В выбранных единицах измерения выражение (1.13) принимает следующий простой вид:

$$T_S = \frac{T_M}{T_M - T1}, \tag{1.14}$$

позволяющий вычислять длительность периода в земных годах. Для рассматриваемого случая $T_S \approx 2,1247$[1].

***Задача* 1.2**

1. *Получите самостоятельно выражение* (1.12)*, описывающее зависимость расстояния между Землей и Марсом от времени, в предположении, что орбита последнего является окружностью.*
2. *Постройте график функции, задаваемой выражением* (1.12).
3. *Оцените, используя рис. 1.7 или график в созданном вами документе, значения параметров ($\overline{u}$, a, Δa) в выражении* (1.11) *и напишите явный вид функции $s(t)$ в этом случае. Для проверки правильности выражения, постройте график $s(t)$ и сравните его с соответствующей зависимостью, представленной на рис. 1.7.*
4. *Исследуйте зависимость функции $s(t)$ от параметров орбитального движения Земли и Марса. От каких параметров зависят период несущей, глубина и период огибающей функции $s(t)$?*

***Задача* 1.3**

Используя астрономические данные, постройте траектории движения других планет Солнечной системы в системе отсчета, связанной с Землей, предположив, что их орбиты плоскости лежат в одной плоскости.

---

[1] Отметим, что именно это свойство относительного движения Земли и Марса явилось причиной форсированной подготовки в первой половине 1990-х гг. российских космических аппаратов по программе «Фобос», закончившейся, к сожалению, неудачей.

***Задача* 1.4**

В качестве единиц измерения расстояния можно использовать, например, радиус орбиты Земли, времени — период обращения Земли вокруг Солнца. Запишите в выбранной системе единиц соответствующие формулы и проведите вычисления.

***Задача* 1.5**

Изучите технологию создания графического интерфейса пользователя, и создайте аналогичный интерфейс для моделирования траекторий движения планет Солнечной системы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Фейман Р., Лейтон Р., Сэндс М.* Феймановские лекции по физике. Т. 1–2. М.: Мир, 1976.
2. *Матвеев А. Н.* Механика и теория относительности. М.: Высшая школа, 1986.
3. Физическая энциклопедия. Т. 3. М.: Большая российская энциклопедия, 1992.
4. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Курс теоретической физики. Механика. М.: Физматгиз, 2000.
5. *Баскаков С. И.* Радиотехнические цепи и сигналы. М.: Высшая школа, 1988.