# ЗАДАЧИ

1. Точка движется вдоль оси $Ox$, ее скорость изменяется по закону: $\upsilon(t) = 0{,}1 + 0{,}3\tau + 0{,}2\tau^2 - 0{,}1\tau^3$ (м/с). Постройте графики зависимости $x(\tau)$ и $\upsilon(\tau)$. Найдите координату и скорость точки в момент $\tau' = 3{,}2$ с, а также среднюю скорость за первую и третью секунды движения.

*Запишем формулы:* $\Delta x = \upsilon(\tau)\Delta\tau$, $x^{t+1} = x^t + \upsilon^t \Delta\tau$. *Координата* $x$ *находится как интеграл от скорости по времени, для ее вычисления применяется метод прямоугольников. Шаг по времени* $\Delta\tau = 0{,}1$ *помещают в ячейку E1. В ячейку A1 таблицы вводят время* $\tau = 0$*, в ячейку A2 – '=A1+$E$1', затем эту формулу копируют вниз. Высота таблицы 50 строк. В ячейку B1 вводят формулу для расчета скорости точки '=0,1+0,3*A1+0,2*A1*A1–0,1*A1*A1*A1', а затем ее копируют вниз. В ячейку C1 записывают формулу '=B1*$E$1', а в ячейку C2 помещают формулу '=C1+B2*$E$1', которую также копируют вниз. В ячейках столбца C вычисляется приращение координаты за время* $\Delta\tau$ *и складывается с координатой точки в предыдущий момент времени. На основе таблицы строят графики* $x(\tau)$ *и* $\upsilon(\tau)$.

2. Камень брошен со скоростью $\upsilon_0 = 17$ м/с под углом $\alpha$ к горизонту. Рассчитайте его координаты $x$ и $y$, проекции скорости $\upsilon_x$ и $\upsilon_y$, модуль скорости $\upsilon$, угол $\gamma$ между вектором скорости и горизонталью, тангенциальное $a_\tau$ и нормальное $a_n$ ускорения в момент $\tau' = 1{,}3$ с.

*Запишем формулы, позволяющие определить искомые величины:*

$$x = \upsilon_0 \cos\alpha \cdot \tau, \qquad y = \upsilon_0 \sin\alpha \cdot \tau - g\tau^2/2,$$

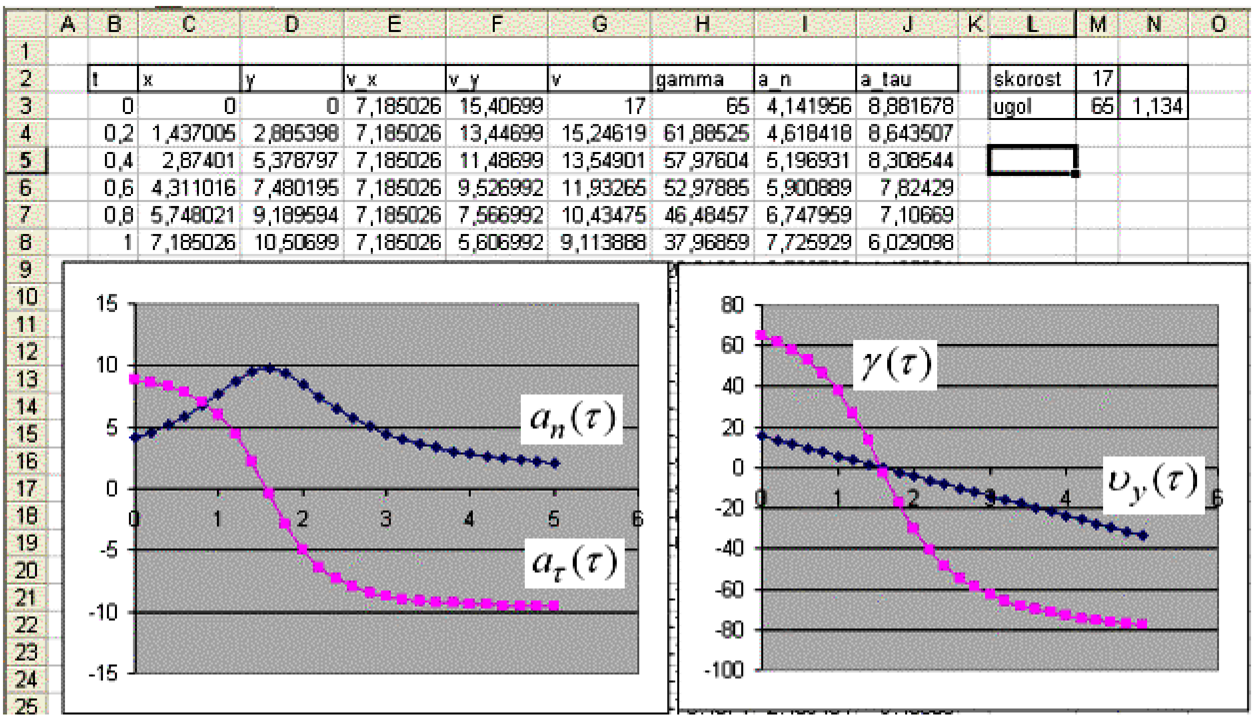
$$\upsilon_x = \upsilon_0 \cos\alpha, \quad \upsilon_y = \upsilon_0 \sin\alpha - g\tau, \quad \upsilon = \sqrt{\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2},$$

$$\gamma = arctg(\upsilon_y / \upsilon_x), \quad a_n = g\cos\gamma, \quad a_\tau = g\sin\gamma.$$

*Для того чтобы можно было изменять исходные данные, задаваемые значения начальной скорости* $\upsilon_0$ *и угла* $\alpha$ *следует ввести в отдельные ячейки, например M2 и M3. Чтобы перевести градусы в радианы, в ячейку N3 вводят формулу: "=M3*3,1415/180". Для решения задачи в Excel создается таблица; содержимое ее ячеек представлено в табл. 2.1. Получающиеся результаты приведены на рис. 2.1.*

*Таблица 2.1*

| *Ячейки* | *Величина* | *Содержимое* |
|---|---|---|
| *B1, B2, B3, …* | $\tau$ | *0; 0,2; 0,4; 0,6; 0,8; 1; 1,2 ...* |
| *C3* | $x$ | *=$M$2*COS($N$3)*B3* |
| *D3* | $y$ | *=$M$2*SIN($N$3)*B3-9,8*B3*B3/2* |
| *E3* | $\upsilon_x$ | *=$M$2*COS($N$3)* |
| *F3* | $\upsilon_y$ | *=$M$2*SIN($N$3)-9,8*B3* |
| *G3* | $\upsilon$ | *=КОРЕНЬ(E3*E3+F3*F3)* |
| *H3* | $\gamma$ | *=ATAN(F3/E3)*180/3,1415* |
| *I3* | $a_n$ | *=9,8*COS(ATAN(F3/E3))* |
| *J3* | $a_\tau$ | *=9,8*SIN(ATAN(F3/E3))* |



| | B | C | D | E | F | G | H | I | J | L | M | N |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | t | x | y | v_x | v_y | v | gamma | a_n | a_tau | skorost | 17 | |
| 3 | 0 | 0 | 0 | 7,185026 | 15,40699 | 17 | 65 | 4,141956 | 8,881678 | ugol | 65 | 1,134 |
| 4 | 0,2 | 1,437005 | 2,885398 | 7,185026 | 13,44699 | 15,24619 | 61,88525 | 4,618418 | 8,643507 | | | |
| 5 | 0,4 | 2,87401 | 5,378797 | 7,185026 | 11,48699 | 13,54901 | 57,97604 | 5,196931 | 8,308544 | | | |
| 6 | 0,6 | 4,311016 | 7,480195 | 7,185026 | 9,526992 | 11,93265 | 52,97885 | 5,900889 | 7,82429 | | | |
| 7 | 0,8 | 5,748021 | 9,189594 | 7,185026 | 7,566992 | 10,43475 | 46,48457 | 6,747959 | 7,10669 | | | |
| 8 | 1 | 7,185026 | 10,50699 | 7,185026 | 5,606992 | 9,113888 | 37,96859 | 7,725929 | 6,029098 | | | |



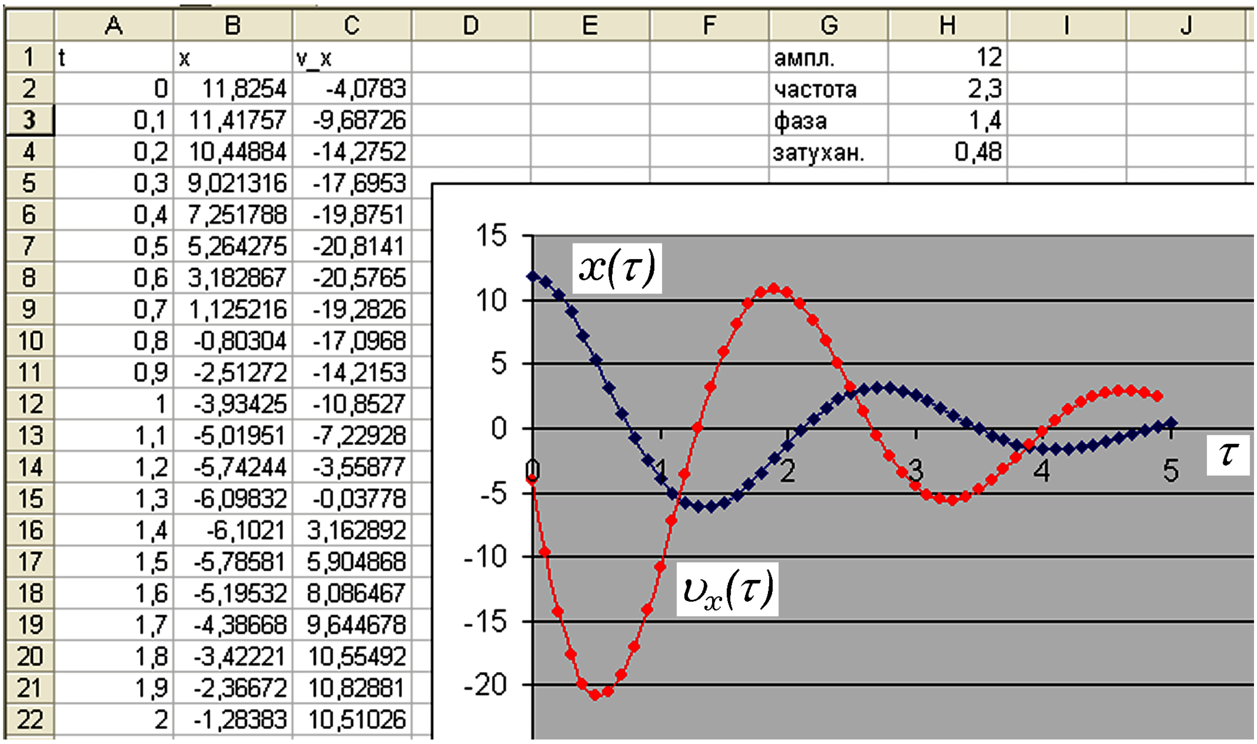
Рис. 2.1. Расчет движения камня, брошенного под углом к горизонту

**3**. Тело совершает затухающие колебания, описывающиеся уравнением: $x(\tau) = A\exp(-\beta\tau)\sin(\omega\tau + \varphi_0)$. Постройте графики зависимости координаты $x = x(\tau)$ и проекции скорости $\upsilon_x = \upsilon_x(\tau)$ от времени, а также фазовую кривую при различных значениях амплитуды $A$, частоты $\omega$, начальной фазы $\varphi_0$ и коэффициента затухания $\gamma$.

*Решим эту задачу с помощью электронных таблиц, не используя модуль создания макросов. Значения амплитуды, частоты, начальной фазы и коэффициента затухания запишем в ячейки H1–H4. При обращении к этим ячейкам следует использовать абсолютную адресацию.*

*Таблица 3.1*

| *Ячейки* | *Величина* | *Содержимое* |
|---|---|---|
| *A1, A2, A3, …* | $\tau$ | *0; 0,1; 0,2; 0,3; 0,4; 0,5; 0,6 …* |
| *B2* | $x(\tau)$ | *=$H$1*EXP(-$H$4*A2)*SIN($H$2*A2+$H$3)* |
| *C2* | $\upsilon_x(\tau)$ | *=(B3-B2)/0,1* |



| | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | t | x | v_x | | | | ампл. | 12 | | |
| 2 | 0 | 11,8254 | -4,0783 | | | | частота | 2,3 | | |
| 3 | 0,1 | 11,41757 | -9,68726 | | | | фаза | 1,4 | | |
| 4 | 0,2 | 10,44884 | -14,2752 | | | | затухан. | 0,48 | | |
| 5 | 0,3 | 9,021316 | -17,6953 | | | | | | | |
| 6 | 0,4 | 7,251788 | -19,8751 | | | | | | | |
| 7 | 0,5 | 5,264275 | -20,8141 | | | | | | | |
| 8 | 0,6 | 3,182867 | -20,5765 | | | | | | | |
| 9 | 0,7 | 1,125216 | -19,2826 | | | | | | | |
| 10 | 0,8 | -0,80304 | -17,0968 | | | | | | | |
| 11 | 0,9 | -2,51272 | -14,2153 | | | | | | | |
| 12 | 1 | -3,93425 | -10,8527 | | | | | | | |
| 13 | 1,1 | -5,01951 | -7,22928 | | | | | | | |
| 14 | 1,2 | -5,74244 | -3,55877 | | | | | | | |
| 15 | 1,3 | -6,09832 | -0,03778 | | | | | | | |
| 16 | 1,4 | -6,1021 | 3,162892 | | | | | | | |
| 17 | 1,5 | -5,78581 | 5,904868 | | | | | | | |
| 18 | 1,6 | -5,19532 | 8,086467 | | | | | | | |
| 19 | 1,7 | -4,38668 | 9,644678 | | | | | | | |
| 20 | 1,8 | -3,42221 | 10,55492 | | | | | | | |
| 21 | 1,9 | -2,36672 | 10,82881 | | | | | | | |
| 22 | 2 | -1,28383 | 10,51026 | | | | | | | |



Рис. 3.1. Результат моделирования затухающих колебаний

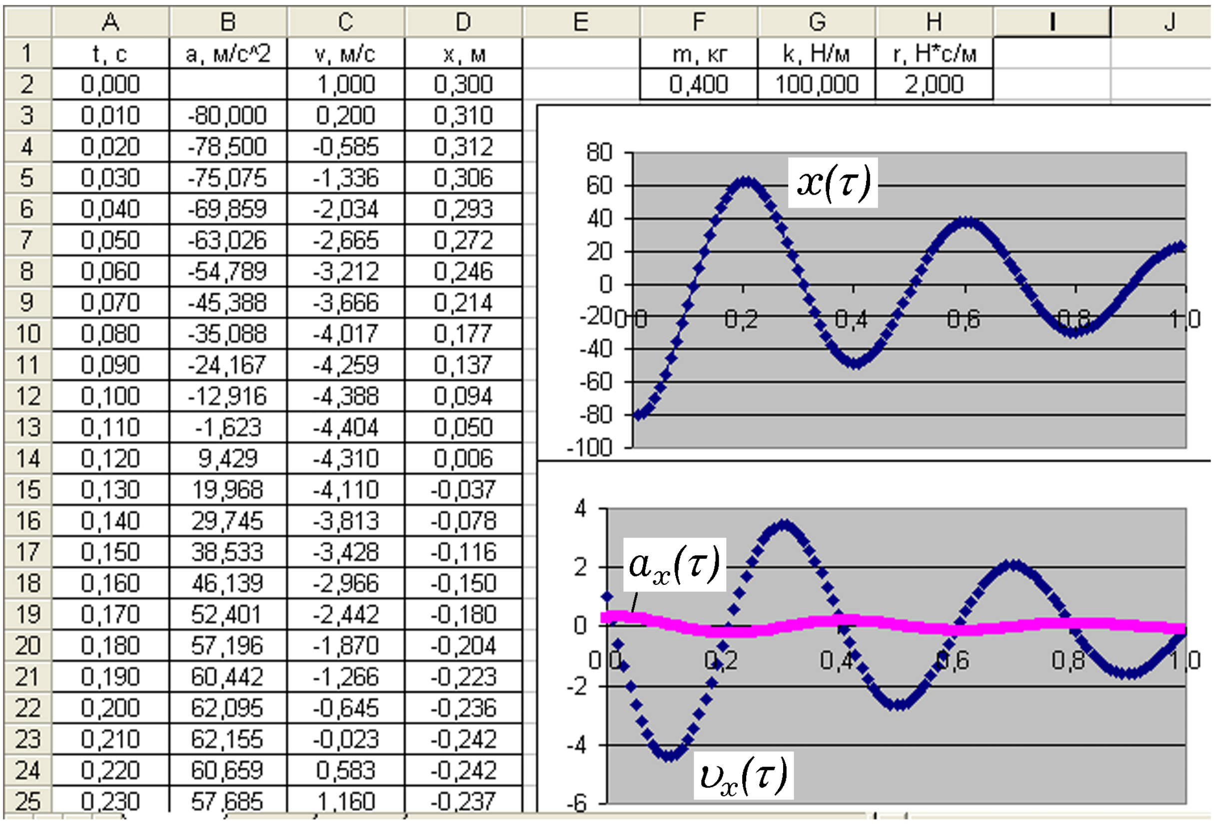
4. Пружинный маятник состоит из тела массы $m$, подвешенного на пружине с жесткостью $k$ в среде с вязкостью $r$. Систему выводят из равновесия и сообщают начальную скорость. Промоделируйте затухающие колебания при различных параметрах системы и начальных условиях $x_0$ и $\upsilon_0$. Постройте фазовую кривую в осях $x$ и $\upsilon_x$.

*По второму закону Ньютона:* $ma_x = -kx - r\upsilon_x$. *Получаем:*

$$m\ddot{x} + r\ddot{x} + kx = 0, \quad a_x^{t+1} = (-kx^t - r\upsilon_x^t)/m,$$

$$\upsilon_x^{t+1} = \upsilon_x^t + a_x^{t+1}\Delta\tau, \qquad x^{t+1} = x^t + \upsilon_x^{t+1}\Delta\tau.$$

*В столбец A вводят время $\tau$ с шагом 0,01 с. Параметры $m$, $k$ и $r$ записывают в ячейки F2, G2, H2 соответственно. В ячейку B3 следует ввести "=(-$G$2*D2-$H$2*C2)/$F$2", в ячейку C3 вводят "=C2+B3*0,01", а в ячейку D3 – "=D2+C2*0,01". После этого формулы копируют вниз, создавая таблицу. Результаты моделирования представлены на рис. 4.1. Изменяя параметры колебательной системы, можно убедиться в том, что: 1) при увеличении массы период колебаний растет; 2) при увеличении жесткости период уменьшается; 3) при увеличении коэффициента сопротивления затухание происходит быстрее. Используя значения $x(\tau)$ и $\upsilon_x(\tau)$, постройте фазовую кривую в осях $x$ и $\upsilon$.*



| | A | B | C | D | E | F | G | H |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | t, c | a, м/с^2 | v, м/с | x, м | | m, кг | k, Н/м | r, Н*с/м |
| 2 | 0,000 | | 1,000 | 0,300 | | 0,400 | 100,000 | 2,000 |
| 3 | 0,010 | -80,000 | 0,200 | 0,310 | | | | |
| 4 | 0,020 | -78,500 | -0,585 | 0,312 | | | | |
| 5 | 0,030 | -75,075 | -1,336 | 0,306 | | | | |
| 6 | 0,040 | -69,859 | -2,034 | 0,293 | | | | |
| 7 | 0,050 | -63,026 | -2,665 | 0,272 | | | | |
| 8 | 0,060 | -54,789 | -3,212 | 0,246 | | | | |
| 9 | 0,070 | -45,388 | -3,666 | 0,214 | | | | |
| 10 | 0,080 | -35,088 | -4,017 | 0,177 | | | | |
| 11 | 0,090 | -24,167 | -4,259 | 0,137 | | | | |
| 12 | 0,100 | -12,916 | -4,388 | 0,094 | | | | |
| 13 | 0,110 | -1,623 | -4,404 | 0,050 | | | | |
| 14 | 0,120 | 9,429 | -4,310 | 0,006 | | | | |
| 15 | 0,130 | 19,968 | -4,110 | -0,037 | | | | |
| 16 | 0,140 | 29,745 | -3,813 | -0,078 | | | | |
| 17 | 0,150 | 38,533 | -3,428 | -0,116 | | | | |
| 18 | 0,160 | 46,139 | -2,966 | -0,150 | | | | |
| 19 | 0,170 | 52,401 | -2,442 | -0,180 | | | | |
| 20 | 0,180 | 57,196 | -1,870 | -0,204 | | | | |
| 21 | 0,190 | 60,442 | -1,266 | -0,223 | | | | |
| 22 | 0,200 | 62,095 | -0,645 | -0,236 | | | | |
| 23 | 0,210 | 62,155 | -0,023 | -0,242 | | | | |
| 24 | 0,220 | 60,659 | 0,583 | -0,242 | | | | |
| 25 | 0,230 | 57,685 | 1,160 | -0,237 | | | | |



Рис. 4.1. Затухающие колебания пружинного маятника

5. Имеется неоднородный шар радиусом $R = 1$ м, плотность которого задана уравнением: $\rho(r) = 10^3 / (r + 0{,}2)$ кг/м$^3$, где $r$ – расстояние до центра О в метрах. Необходимо найти его массу.

*Разобьем шар на $N = 200$ элементарных масс $\Delta m_i$, имеющих форму сферических слоев радиусом $r_i$ и толщиной $\Delta r$. Объем каждого слоя $\Delta V_i = 4\pi \cdot r_i^2 \Delta r$, а его масса $\Delta m_i = \rho(r_i)\Delta V_i = 10^3 \Delta V_i / (r_i + 0{,}2)$. Общая масса шара*

$$m \approx \sum_{i=1}^{N} \Delta m_i = \sum_{i=1}^{N} \rho(r_i)\Delta V_i = \sum_{i=1}^{N} \frac{10^3}{r_i + 0{,}2} 4\pi \cdot r_i^2 \Delta r .$$

*Точное значение массы шара равно интегралу:*

$$m = \int_V \rho(r) dV = \int_0^R \frac{4\pi \cdot 10^3}{r + 0{,}2} r^2 dr .$$

*Для решения этой задачи численным методом в среде Excel создается таблица из 200 строк. В столбец А следует ввести значения $r_i = 0{,}005i$, где i =0, 1, 2, ... В столбце В вычисляется элементарный объем $\Delta V_i$ сферического слоя толщиной $\Delta r$ =0,05 м, для этого в ячейку В2 записывают формулу '=4*3,1415*A2*A2*0,05'. В ячейку С2 вводят '=1000/(A2+0,2)', в ячейку D2 записывают '=B2*C2', в ячейку Е3 вводят '=D3+E2'. После этого содержимое ячеек В2, С2, D2 и Е3 копируют вниз, заполняя все 200 строк таблицы. В последнем столбце суммируются все элементарные массы $\Delta m_i$. Искомое значение массы шара находится в самой нижней ячейке столбца Е и равно 46966 кг.*

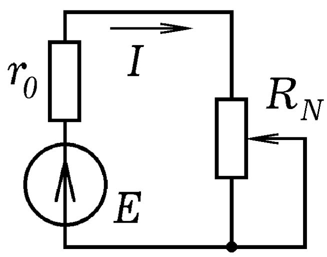
6. К источнику постоянного напряжения с ЭДС $E = 10$ В и внутренним сопротивлением $r = 5$ Ом подключен переменный резистор. При каком сопротивлении внешней нагрузки $R$ выделяющаяся на нем мощность $P$ максимальна? Постройте график $P = P(R)$.

*Сила тока и мощность рассчитываются по формулам:*

$$I = E/(R+r), \qquad P = I^2 R.$$

*Решим эту задачу без использования макросов, для этого создадим таблицу. Столбец А содержит значения сопротивления нагрузки $R$, столбцы В и С – результаты расчетов силы тока и мощности (в ячейки В2 и С2 записывают “=10/(A2+5)”, “=B2*B2*A2”). Результаты вычислений представлены на рис. 6.1. Видно, что на нагрузке выделяется максимальная мощность, когда ее сопротивление равно внутреннему сопротивлению источника 5 Ом.*

| | A | B | C |
|---|---|---|---|
| 1 | R, Om | I, A | P, Вт |
| 2 | 0,5 | 1,82 | 1,65 |
| 3 | 1,0 | 1,67 | 2,78 |
| 4 | 1,5 | 1,54 | 3,55 |
| 5 | 2,0 | 1,43 | 4,08 |
| 6 | 2,5 | 1,33 | 4,44 |
| 7 | 3,0 | 1,25 | 4,69 |
| 8 | 3,5 | 1,18 | 4,84 |
| 9 | 4,0 | 1,11 | 4,94 |
| 10 | 4,5 | 1,05 | 4,99 |
| 11 | 5,0 | 1,00 | 5,00 |



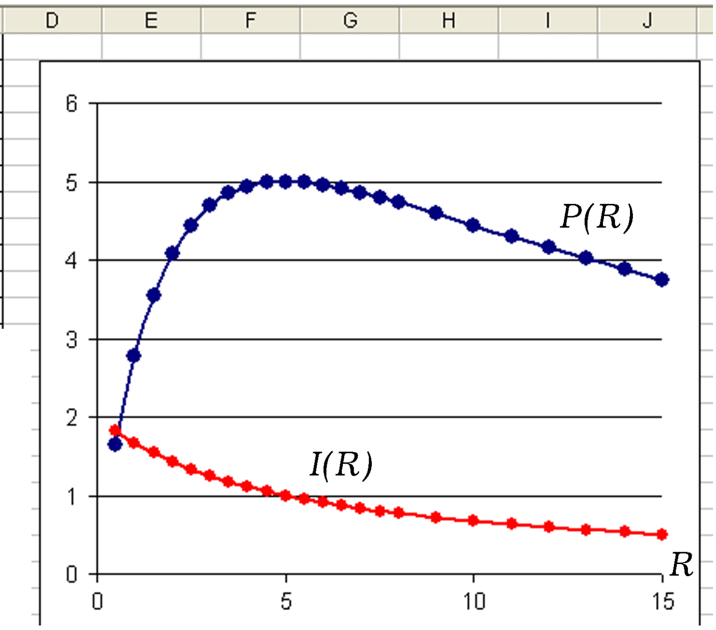




Рис. 6.1. Расчет зависимостей $I(R)$ и $P(R)$

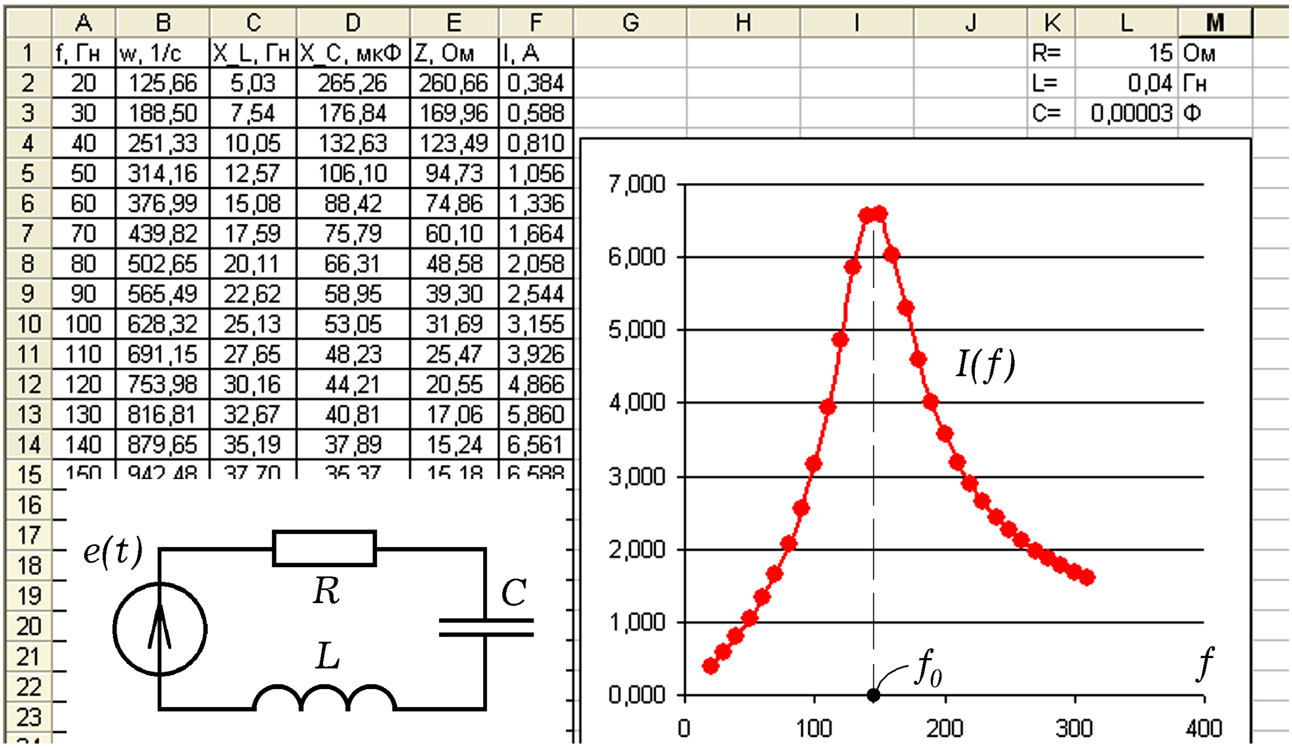
7. К источнику переменного напряжения регулируемой частоты подключен последовательный колебательный контур, состоящий из резистора $R$, конденсатора $C$ и катушки индуктивности $L$. Рассчитайте емкостное $X_C$, индуктивное $X_L$, полное сопротивления цепи $Z$ и силу тока $I$ на разных частотах $f$. Постройте резонансную кривую $I = I(f)$.

*Для моделирования резонанса напряжений используют формулы:*

$$\omega = 2\pi \cdot f\,,\ X_L = \omega L\,,\ X_C = 1/(\omega \cdot C)\,,\ \ Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}\,,$$

$$I = U/Z\,,\ U_L = X_L I\,,\ U_C = X_C I\,,\ \ f_0 = 1/(2\pi\sqrt{LC})\,.$$

*Здесь $f_0$ – собственная частота колебательного контура. Для того чтобы можно было изменять параметры $R$, $C$, $L$, их значения следует поместить в ячейки L1, L2, L3 и использовать абсолютную адресацию. Например, в ячейку C2 следует ввести “=B2*\$L\$2”, а в ячейку D2 нужно записать “=1/(B2*\$L\$3)”. Результаты моделирования представлены на рис.* 7.1.



| | A | B | C | D | E | F |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | f, Гн | w, 1/c | X_L, Гн | X_C, мкФ | Z, Ом | I, A |
| 2 | 20 | 125,66 | 5,03 | 265,26 | 260,66 | 0,384 |
| 3 | 30 | 188,50 | 7,54 | 176,84 | 169,96 | 0,588 |
| 4 | 40 | 251,33 | 10,05 | 132,63 | 123,49 | 0,810 |
| 5 | 50 | 314,16 | 12,57 | 106,10 | 94,73 | 1,056 |
| 6 | 60 | 376,99 | 15,08 | 88,42 | 74,86 | 1,336 |
| 7 | 70 | 439,82 | 17,59 | 75,79 | 60,10 | 1,664 |
| 8 | 80 | 502,65 | 20,11 | 66,31 | 48,58 | 2,058 |
| 9 | 90 | 565,49 | 22,62 | 58,95 | 39,30 | 2,544 |
| 10 | 100 | 628,32 | 25,13 | 53,05 | 31,69 | 3,155 |
| 11 | 110 | 691,15 | 27,65 | 48,23 | 25,47 | 3,926 |
| 12 | 120 | 753,98 | 30,16 | 44,21 | 20,55 | 4,866 |
| 13 | 130 | 816,81 | 32,67 | 40,81 | 17,06 | 5,860 |
| 14 | 140 | 879,65 | 35,19 | 37,89 | 15,24 | 6,561 |
| 15 | 150 | 942,48 | 37,70 | 35,37 | 15,18 | 6,588 |

| | K | L | M |
|---|---|---|---|
| 1 | R= | 15 | Ом |
| 2 | L= | 0,04 | Гн |
| 3 | C= | 0,00003 | Ф |



Рис. 7.1. Резонансная кривая в последовательном контуре

**8.** На прямую треугольную стеклянную призму с преломляющим углом $\varphi = 0{,}54$ рад под углом $\alpha_1$ подает световой луч (рис. 8.1). Рассчитайте его угол отклонения $\psi$ при различных значениях $\alpha_1$, постройте график зависимости $\psi = \psi(\alpha_1)$. При каком угле падения $\alpha_1$ угол отклонения $\psi$ минимален?

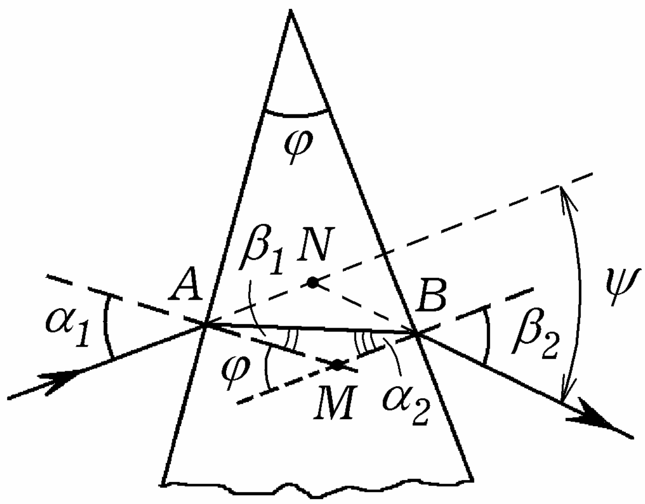



Рис. 8.1. Отклонение луча света призмой на угол $\psi$

*Для решения задачи используются формулы:*

$$\frac{\sin\alpha_1}{\sin\beta_1} = n, \quad \frac{\sin\alpha_2}{\sin\beta_2} = \frac{1}{n}, \quad \beta_1 + \alpha_2 = \varphi, \quad \psi = (\alpha_1 - \beta_1) + (\beta_2 - \alpha_2).$$

*При этом учитывается, что: 1) угол $\varphi$ для треугольника ABM является внешним и поэтому равен сумме двух других углов несмежных с ним; 2) угол отклонения луча $\psi$ призмой складывается из углов NAB и NBA, которые равны $\alpha_1 - \beta_1$ и $\beta_2 - \alpha_2$ соответственно. Угол $\psi$ вычисляется так:* $\beta_1 = \arcsin(\sin\alpha_1 / n)$, $\alpha_2 = \varphi - \beta_1$,

$$\beta_2 = \arcsin(n \sin\alpha_2), \quad \psi = (\alpha_1 - \beta_1) + (\beta_2 - \alpha_2).$$

*Угол падения $\alpha_1$ изменяется от 0 до $\pi/2 \approx 1{,}57$ рад с шагом $\Delta\alpha_1$=0,05 рад; его записывают в первый столбец таблицы. В остальных столбцах находятся результаты вычислений $\beta_1$, $\alpha_2$, $\beta_2$, $\psi$ в радианах при различных $\alpha_1$. Значения показателя преломления n и преломляющего угла $\varphi$ задаются в ячейках H1 и H2 (рис. 8.2).*

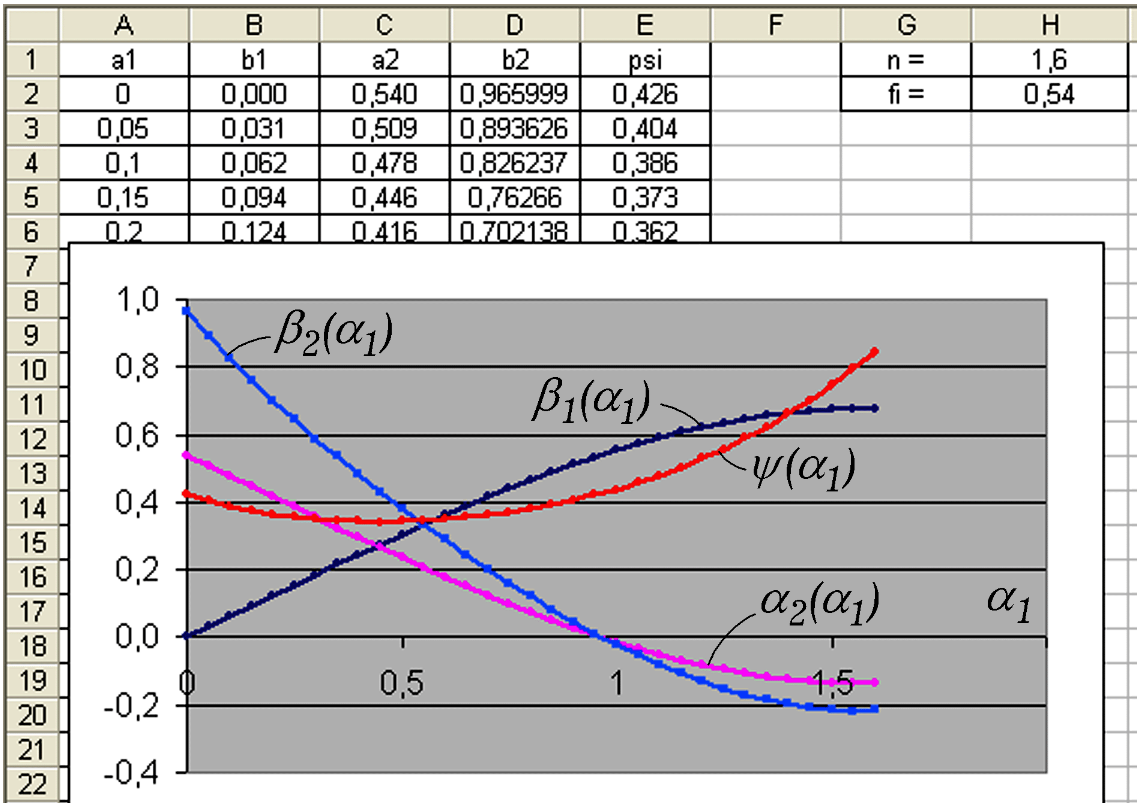



Рис. 8.2. Получающиеся графики зависимостей $\beta_1$, $\alpha_2$, $\beta_2$, $\psi$ от $\alpha_1$

*Из результатов вычислений видно, что при $\alpha_1$=0,95 рад луч света падает на вторую преломляющую поверхность нормально ($\alpha_2 = \beta_2 = 0$). При любых $\alpha_1$ из интервала [0; $\pi/2$] угол отклонения $\psi$ положительный и достигает минимума при $\alpha_1$=0,40-0,45 рад. Чтобы определить положение минимума точнее, необходимо повторить вычисления при меньшем шаге $\Delta\alpha_1$.*

**9**. Два когерентных источника с мощностью $P_1$ и $P_2$ излучают гармонические звуковые волны с длиной $\lambda$ синфазно (рис. 9.1). Источники отстоят друг от друга на расстоянии $d$ и удалены от оси $Oy$ на расстояние $L$. Рассчитайте распределение интенсивности $I(y)$ вдоль оси $Oy$.

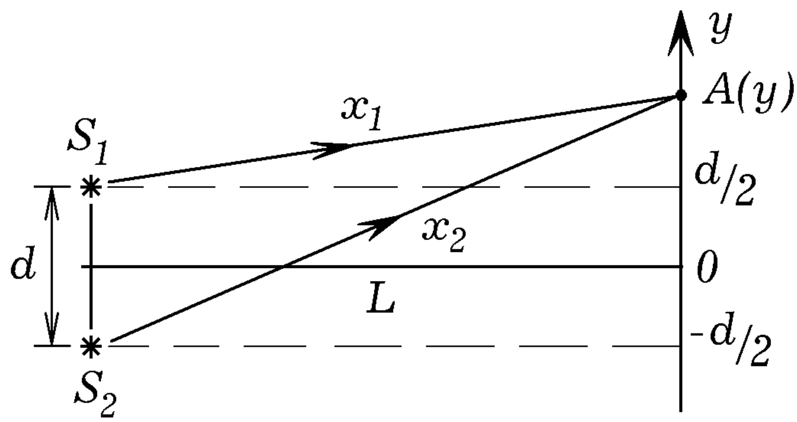
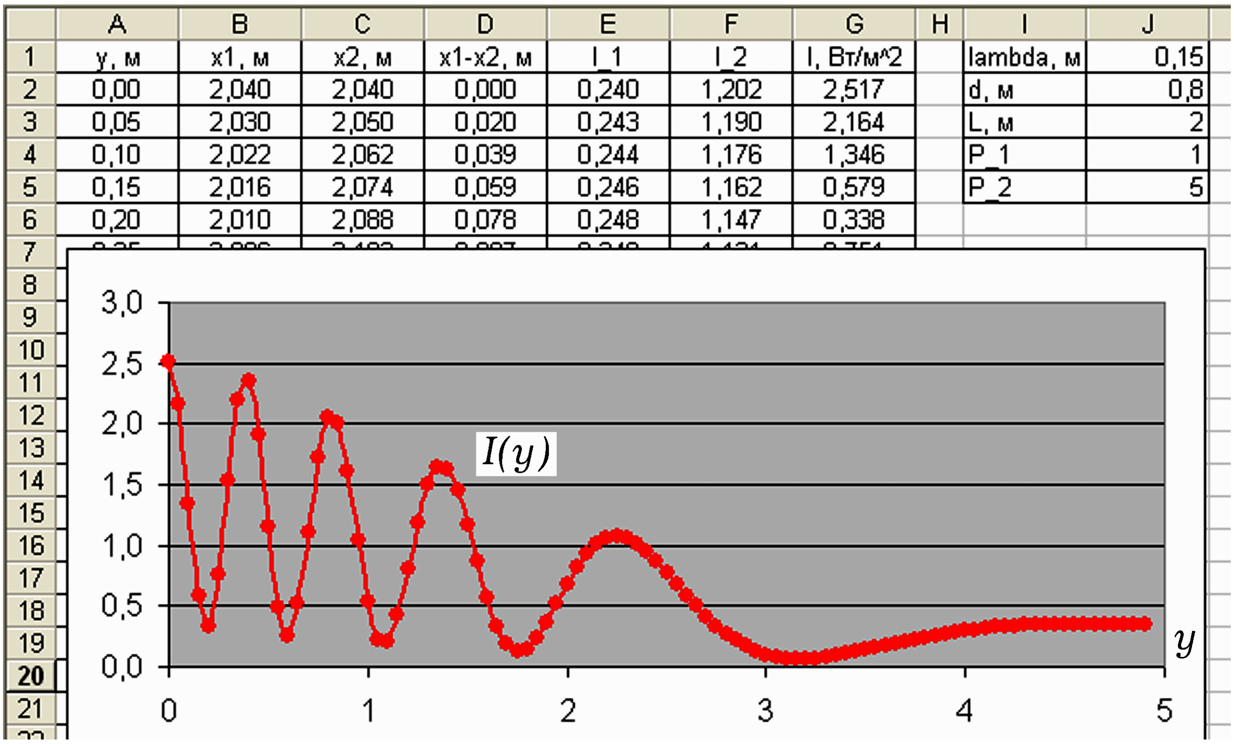



Рис. 9.1. Интерференция от двух точечных источников

*Результирующая интенсивность в точке наблюдения A$(y)$:*

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\cos(2\pi \cdot \Delta x / \lambda),$$

*где* $I_1$ *и* $I_2$ *– интенсивности волн в точке A*$(y)$, $\Delta x = x_2 - x_1$ *– их разность хода,* $x_1 = (L^2 + (y - d/2)^2)^{0,5}$ *и* $x_2 = (L^2 + (y + d/2)^2)^{0,5}$ *– расстояния, проходимые волнами. Так как вся излучаемая источником энергия равномерно распределяется по сферической волновой поверхности, то* $I_1 = P_1/(4\pi \cdot x_1^2)$ *и* $I_2 = P_2/(4\pi \cdot x_2^2)$*. Для решения задачи следует создать такую же таблицу, как на рис. 9.2 и построить график* $I(y)$*. Изменяя длину волны, мощности источников, расстояние между ними и до экрана, можно изучить зависимость интерференционного распределения интенсивности вдоль оси Oy от перечисленных величин.*



| | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | y, м | x1, м | x2, м | x1-x2, м | I_1 | I_2 | I, Вт/м^2 | | lambda, м | 0,15 |
| 2 | 0,00 | 2,040 | 2,040 | 0,000 | 0,240 | 1,202 | 2,517 | | d, м | 0,8 |
| 3 | 0,05 | 2,030 | 2,050 | 0,020 | 0,243 | 1,190 | 2,164 | | L, м | 2 |
| 4 | 0,10 | 2,022 | 2,062 | 0,039 | 0,244 | 1,176 | 1,346 | | P_1 | 1 |
| 5 | 0,15 | 2,016 | 2,074 | 0,059 | 0,246 | 1,162 | 0,579 | | P_2 | 5 |
| 6 | 0,20 | 2,010 | 2,088 | 0,078 | 0,248 | 1,147 | 0,338 | | | |



Рис. 9.2. Распределение интенсивности при интерференции