

## 8. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений

Дифференциальным уравнением  $n$ -го порядка называется соотношение вида

$$H(t, x, x', x'', \dots, x^{(n)}) = 0 \quad (8.1)$$

Решением дифференциального уравнения является функция  $x(t)$ , которая обращает уравнение в тождество.

Системой дифференциальных уравнений  $n$ -го порядка называется система вида:

$$\begin{aligned} x_1' &= f_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ x_2' &= f_2(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &\dots \\ x_n' &= f_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \end{aligned} \quad (8.2)$$

Решение системы - вектор который обращает уравнения системы (8.2) в тождества:

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \dots \\ x_n(t) \end{pmatrix} \quad (8.3).$$

Дифференциальные уравнения и системы имеют бесконечное множество решений, которые отличаются друг от друга константами. Для однозначного определения решения требуется задать дополнительные начальные или граничные условия. Количество таких условий должно совпадать с порядком дифференциального уравнения или системы. В зависимости от вида дополнительных условий в дифференциальных уравнениях различают: *задачу Коши* – все дополнительные условия заданы в одной (чаще начальной) точке интервала; *краевую задачу* – дополнительные условия указаны на границах интервала.

Большое количество уравнений может быть решено точно. Однако есть уравнения, а особенно системы уравнений, для которых точное решение записать нельзя. Такие уравнения и системы решают при помощи численных методов. Так же численные методы применяют, если для уравнений с известным аналитическим решением требуется найти числовое значение при определенных исходных данных.

Для решения дифференциальных уравнений и систем в Sciab предусмотрена функция:

```
[y, w, iw]=ode([type], y0, t0, t [, rtol [, atol]], f [, jac] [, w, iw])
```

для которой, *обязательными входными параметрами* являются:

$y_0$  – вектор начальных условий;

$t_0$  – начальная точка интервала интегрирования;

$t$  – координаты узлов сетки, в которых происходит поиск решения;

$f$  – внешняя функция, определяющая правую часть уравнения или системы уравнений (8.2);

$y$  – вектор решений (8.3).

Таким образом, для того чтобы решить обыкновенное дифференциальное уравнение вида

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y), y(t_0) = y_0, \text{ необходимо вызвать функцию } y = \text{ode}(y_0, t_0, t, f).$$

Рассмотрим необязательные параметры функции `ode`:

`type` – параметр с помощью которого можно выбрать метод решения или тип решаемой задачи, указав одну из строк:

“`adams`” - применяют при решении дифференциальных уравнений или систем методом прогноза-коррекции Адамса;

“`stiff`” - указывают при решении жестких задач;

“`rk`” - используют при решении дифференциальных уравнений или систем методом Рунге\_Кутта четвертого порядка;

“`rkf`” - указывают при выборе пятиэтапного метода Рунге\_Кутта четвертого порядка;

“`fix`” - тот же метод Рунге\_Кутта, но с фиксированным шагом;

`rtol, atol` - относительная и абсолютная погрешности вычислений, вектор, размерность которого совпадает с размерностью вектора `y`, по умолчанию `rtol=0.00001`, `atol=0.0000001`, при использовании параметров “`rkf`” и “`fix`” – `rtol=0.001`, `atol=0.0001`;

`jac` – матрица, представляющая собой якобиан правой части жесткой системы дифференциальных уравнений, задают матрицу в виде внешней функции вида `J=jak(t, y)`;

`w, iw` – векторы, предназначенные для сохранения информации о параметрах интегрирования, которые применяют для того, чтобы последующие вычисления выполнялись с теми же параметрами.

Рассмотрим использование функции на примере следующих задач.

ЗАДАЧА 8.1. Решить задачу Коши

$$\frac{dx}{dt} + x = \sin(xt), x(0) = 1.5.$$

Перепишем уравнение следующим образом:

$$\frac{dx}{dt} = -x + \sin(xt), x(0) = 1.5.$$

Далее представим его в виде внешней функции, так как показано в листинге 8.1 и применим функцию `y=ode(x0, t0, t, f)`, в качестве параметров которой будем использовать

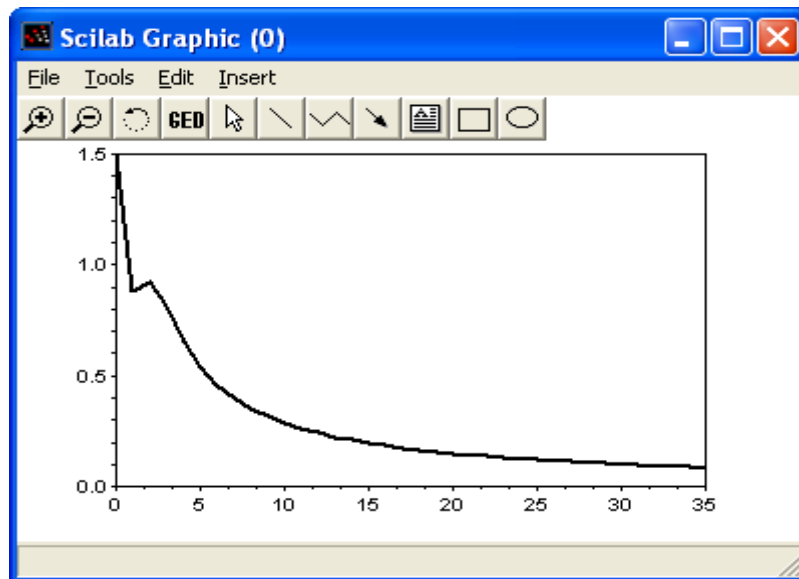
- `f` – ссылка на предварительно созданную функцию `f(t, x)`;
- `t` – координаты сетки;

- $x_0, t_0$  – начальное условие  $x(0)=1.5$ ;
- $y$  – результат работы функции.

График, моделирующий процесс, описанный заданным уравнением, представлен на рис.8.1.

```
-->function yd=f(t,x),yd=-x+sin(t*x),endfunction;
-->x0=1.5;t0=0;t=0:1:35;
-->y=ode(x0,t0,t,f);
-->plot(t,y)
```

**Листинг 8.1**



*Рис. 8.1. Решение дифференциального уравнения из задачи 8.1*

**ЗАДАЧА 8.2.** Решить задачу Коши

$$\begin{aligned}x' &= \cos(x y), \\y' &= \sin(x + t y), \\x(0) &= 0, y(0) = 0.\end{aligned}$$

на интервале  $[0; 10]$ .

Листинг 8.2 содержит функцию, описывающую заданную систему обыкновенных дифференциальных уравнений и команды Scilab необходимые для ее численного и графического решения (рис.8.2).

```
>>%Функция, описывающая систему дифференциальных уравнений
-->function dy=syst(t,y)
-->dy=zeros(2,1);
-->dy(1)=cos(y(1)*y(2));
-->dy(2)=sin(y(1)+y(2)*t);
-->endfunction
>>%Решение системы дифференциальных уравнений
-->x0=[0;0];t0=0;t=0:1:10;
-->y=ode(x0,t0,t,syst);
>>%Формирование графического решения
-->plot(t,y)
```

**Листинг 8.2**

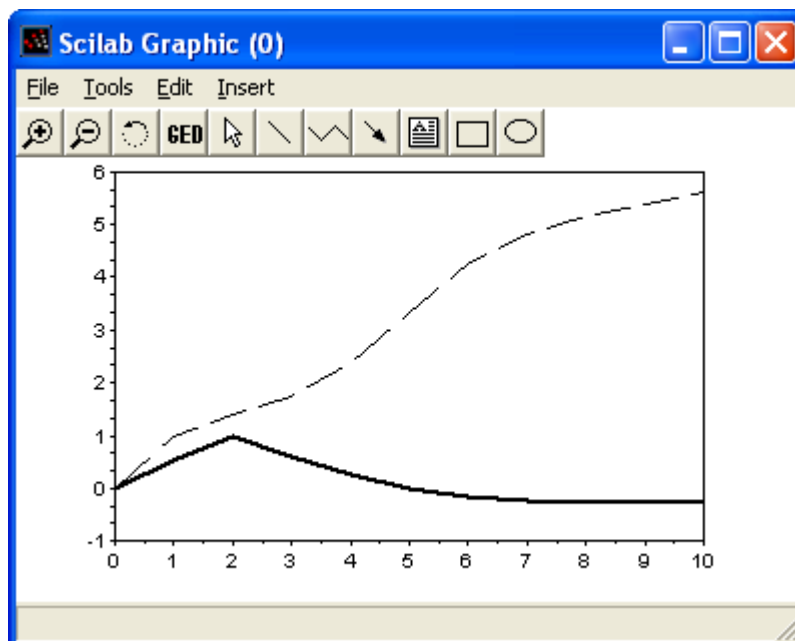


Рис. 8.2. Решение задачи 8.2

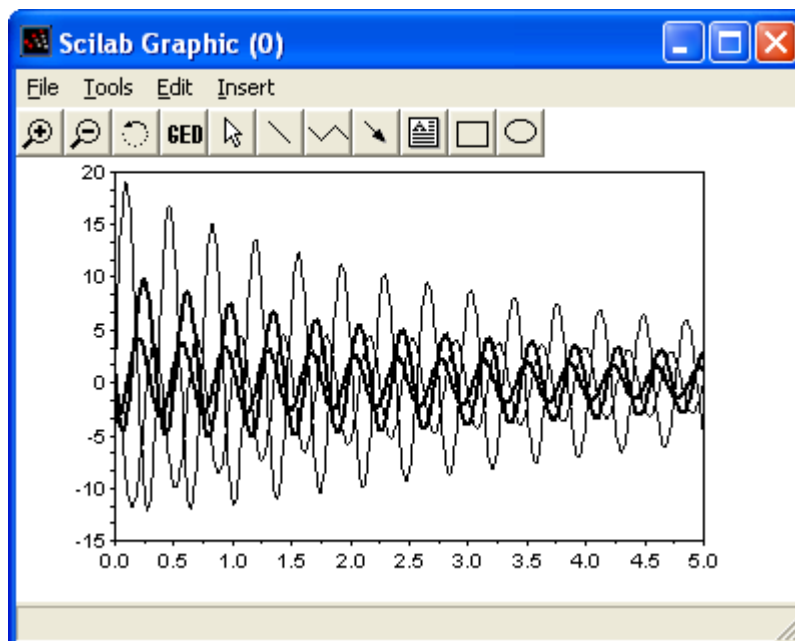


Рис. 8.3. Графическое решение жесткой системы

ЗАДАЧА 8.3. Найти решение задачи Коши для следующей жесткой системы:

$$\frac{dX}{dt} = \begin{pmatrix} 119.46 & 185.38 & 126.88 & 121.03 \\ -10.395 & -10.136 & -3.636 & 8.577 \\ -53.302 & -85.932 & -63.182 & 54.211 \\ -115.58 & -181.75 & -112.8 & -199 \end{pmatrix} X; X(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Решение системы показано в листинге 8.3. Графическое решение показано на рис. 8.3.

```
-->B=[119.46 185.38 126.88 121.03;-10.395 -10.136 -3.636 8.577;
-->-53.302 -85.932 -63.182 -54.211;-115.58 -181.75 -112.8 -199];
-->function dx=syst1(t,x), dx=B*x,endfunction
-->function J=Jac(t,y), J=B,endfunction
-->x0=[1;1;1;1]; t0=0; t=0:0.01:5;
```

```
-->y=ode("stiff",x0,t0,t,syst1,Jacobian);
-->plot(t,y)
```

### Листинг 8.3

ЗАДАЧА 8.4. Решить нелинейную жесткую систему дифференциальных уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx_1}{dt} = -7x_1 + 7x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} = 157x_1 - 1.15x_2x_3 \\ \frac{dx_3}{dt} = 0.96x_1x_2 - 8.36x_3 \end{array} \right\}, \quad X(0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

На рис. 8.4 показано решение системы на интервале [0; 2]. Команды Scilab необходимые для достижения этого решения приведены в листинге 8.4.

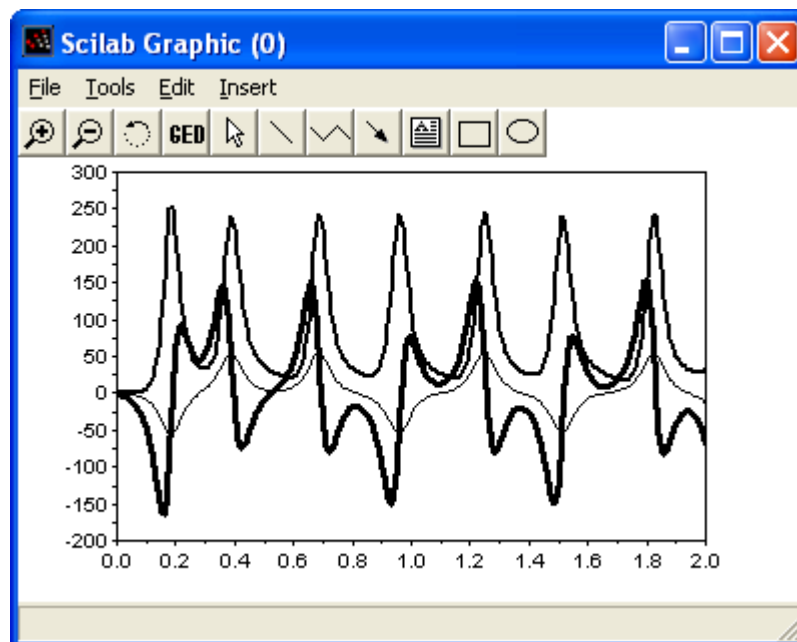


Рис. 8.4. Решение жесткой нелинейной системы

```
//Функция задающая систему ОДУ
function dx=syst2(t,x)
dx=zeros(3,1);
dx(1)=-7*x(1)+7*x(2);
dx(2)=157*x(1)+x(2)-1.15*x(1)*x(3);
dx(3)=0.96*x(1)*x(2)-8.36*x(3);
endfunction
-->>//Решение ОДУ
-->x0=[-1;0;1]; t0=0; t=0:0.01:2;y=ode("stiff",x0,t0,t,syst2);
-->plot(t,y)
```

### Листинг 8.4

ЗАДАЧА 8.5. Решить следующую краевую задачу

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 4 \frac{dx}{dt} + 13 = e^{\sin(t)}, \quad x(0.25) = -1, \quad x'(0.25) = 1.$$

на интервале [0.25; 2].

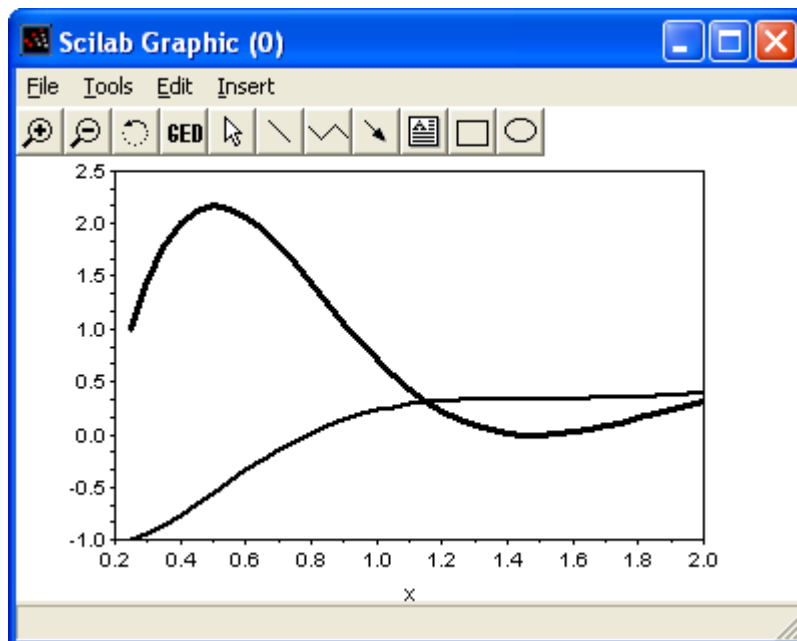
Преобразуем уравнение в систему, сделав замену  $y = \frac{dx}{dt}$  :

$$\frac{dy}{dt} = -4y - 13x + e^{\sin(t)}, \quad \frac{dx}{dt} = y, \quad y(0.25) = 1, \quad x(0.25) = -1.$$

Составим функцию вычисления системы и решим ее так, как показано в листинге 8.5. График решения приведен на рис. 8.5.

```
function F=FF(t,x)
F=[-4*x(1)-13*x(2)+exp(t);x(1)];
endfunction
-->//Решение системы дифференциальных уравнений
-->X0=[1;-1];t0=0.25;t=0.25:0.05:2;
-->y=ode("stiff",X0,t0,t,FF);
-->//Вывод графика решения
-->plot(t,y)
```

**Листинг 8.5**



*Рис.8.5. Решение задачи 8.5*