7. Численное интегрирование и дифференцирование

В функциях интегрирования и дифференцирования в `Scilab` реализованы различные численные алгоритмы.

7.1. Интегрирование по методу трапеций

В `Scilab` *численное интегрирование по методу трапеций* реализовано с помощью функции `inttrap([x,]y)`. Эта функция вычисляет площадь фигуры под графиком функции $y(x)$, которая описана набором точек (x, y), по умолчанию элементы вектора x принимают значения номеров элементов вектора y.

ЗАДАЧА 7.1. Вычислить определенный интеграл:

$$\int_5^{13} \sqrt{2x-1}\, dx$$

Этот интеграл легко сводится к табличному:

$$\int_5^{13} \sqrt{2x-1}\, dx = \frac{\sqrt{(2x-1)^3}}{3}$$

поэтому вычислить его по формуле Ньютона–Лейбница не составит труда (листинг 7.1).

```
-->a=5;
-->b=13;
-->I=1/3*(2*b-1)^(3/2)-1/3*(2*a-1)^(3/2)
 I  =
 32.666667
```

Листинг 7.1

Теперь применим для отыскания заданного определенного интеграла *метод трапеций*. Листинг 7.2 содержит несколько вариантов решения данной задачи. В первом случае интервал интегрирования делится на отрезки с шагом один, во втором 0.5 и в третьем 0.1. Не трудно заметить, что чем больше точек разбиения, тем точнее значение искомого интеграла.

```
-->x=a:b;
-->y=sqrt(2*x-1);
-->inttrap(x,y)
 ans  =
    32.655571
>>%---------------
-->h=0.5;
-->x=a:h:b;
-->y=sqrt(2*x-1);
-->inttrap(x,y)
 ans  =
    32.66389
>>%---------------
-->h=0.1;
-->x=a:h:b;
-->y=sqrt(2*x-1);
```

```
-->inttrap(x,y)
 ans  =
    32.666556
```

Листинг 7.2

В листинге 7.3 приведен пример использования функции `inttrap` с одним аргументом. Как видим, в первом случае значение интеграла вычисленного при помощи этой функции не точно и совпадает со значением, полученным функцией `inttrap(x,y)` на интервале [5; 13] с шагом 1 (листинг 7.2). То есть мы нашли сумму площадей восьми прямолинейных трапеций с основанием h=1 и боковыми сторонами, заданными вектором **y**. Во втором случае, при попытке увеличить точность интегрирования, значение интеграла существенно увеличивается. Дело в том что, уменьшив шаг разбиения интервала интегрирования до 0.1, мы увеличили количество элементов векторов **x** и **y** и применение функции `inttrap(y)` приведет к вычислению суммы площадей восьмидесяти трапеций с основанием h=1 и боковыми сторонами, заданными вектором **y**. Таким образом, в первом и втором примерах листинга 7.3 вычисляются площади совершенно разных фигур.

```
-->x=a:b;
-->y=sqrt(2*x-1);
-->inttrap(y)
 ans  =
    32.655571
>>%---------------
-->h=0.1;
-->x=a:h:b;
-->y=sqrt(2*x-1);
-->inttrap(y)
 ans  =
    326.66556
```

Листинг 7.3

7.2. Интегрирование по квадратуре

Методы *трапеций* являются частными случаями *квадратурных формул Ньютона–Котеса*, которые, вообще говоря, имеют вид

$$\int_a^b y dy = (b-a) \sum_{i=0}^{n} H_i y_i \tag{7.1}$$

где H_i – это некоторые константы называемые постоянными Ньютона–Котеса.

Если для (7.1) принять n=1, то получим *метод трапеций*, а при n=2 – *метод Симпсона*. Эти методы называют квадратурными методами низших порядков. Для n>2 получают квадратурные формулы Ньютона–Котеса высших порядков.

Вычислительный алгоритм квадратурных формул реализован в `Scilab` функцией

```
integrate(fun, x, a, b, [,er1 [,er2]]),
```

где:

- `fun` – функция, задающая подынтегральное выражение в символьном виде;
- `x` – переменная интегрирования, так же задается в виде символа;
- `a`, `b` – пределы интегрирования (действительные числа);
- `er1` и `er2` – абсолютная и относительная точность вычислений (действительные числа).

ЗАДАЧА 7.2. Вычислить интеграл из задачи 7.1.

Решение приведено в листинге 7.4

```
-->integrate('(2*x-1)^0.5','x',5,13)
 ans  =
    32.666667
```

Листинг 7.4

7.3. Интегрирование внешней функции

Наиболее универсальной командой интегрирования в `Scilab` является:

`[I,err]=intg(a, b, name [,er1 [,er2]]),`

где

- `name` – имя функции, задающей подынтегральное выражение; здесь функция может быть задана в виде набора дискретных точек (как таблица) или с помощью внешней функции;
- `a`, `b` – пределы интегрирования;
- `er1` и `er2` – абсолютная и относительная точность вычислений (действительные числа).

ЗАДАЧА 7.3. Вычислить интеграл из задачи 7.1

```
-->deff('y=G(x)','y=sqrt(2*x-1)')
-->intg(5,13,G)
 ans  =
    32.666667
```

Листинг 7.5

ЗАДАЧА 7.4. Вычислить интеграл

$$\int_0^1 \frac{t^2}{\sqrt{(3+\sin(t))}}\,dt$$

```
-->function y=f(t),y=t^2/sqrt(3+sin(t)),endfunction;
-->[I,er]=intg(0,1,f)
 er  =
    1.933D-15
 I  =
    0.1741192
```

Листинг 7.6

7.4. Приближенное дифференцирование, основанное на интерполяционной формуле Ньютона

Идея численного дифференцирования заключается в том, что функцию $y(x)$, заданную в равноотстоящих точках x_i (i=0, 1, ..., n) отрезка $[a, b]$ с помощью значений $y_i=f(x_i)$ приближенно заменяют интерполяционным полиномом Ньютона (7.2, 7.3), построенном для системы узлов $x_0, x_1, ..., x_k$ ($k \leq n$), и вычисляют производные $y'=f'(x)$, $y''=f''(x)$ и т.д.

$$y'(x_0)=\frac{1}{h}(\Delta y_0-\frac{\Delta^2 y_0}{2}+\frac{\Delta^3 y_0}{3}-\frac{\Delta^4 y_0}{4}+\frac{\Delta^5 y_0}{5}-...), \quad (7.2)$$

На практике приближенное дифференцирование применяют в основном для функций заданных в виде таблицы.

В `Scilab` численное дифференцирование реализовано командой `dy=diff(y [,n ]`, где `y` – значения функции $y(x)$ в виде вектора вещественных чисел, `n` – порядок дифференцирования. Результат работы функции - вектор вещественных чисел `dy`, представляющий собой разности порядка `n` интерполяционного полином Ньютона $\Delta y, \Delta^2 y, ..., \Delta^k y$. Рассмотрим работу функции на примере.

ЗАДАЧА 7.4. Найти y'(50) функции y=lg(x), заданной в виде таблицы. Решение задачи показано в листинге 7.7.

```
-->h=5;
-->x=50:5:65
 x  =
    50.    55.    60.    65.
-->y=log10(x)
 y  =
    1.69897    1.7403627    1.7781513    1.8129134
-->dy=diff(y)
 dy  =
    0.0413927    0.0377886    0.0347621
-->dy2=diff(y,2)
 dy2  =
  - 0.0036041  - 0.0030265
-->dy3=diff(y,3)
 dy3  =
    0.0005777
-->//Приближенное значение y'(50) по формуле (7.2)
-->Y=(dy(1)-dy2(1)/2+dy3(1)/3)/h
 Y  =
    0.0086775
-->//Значение y'(50) для lg'(x)=1/ln(10)/x
-->1/log(10)/x(1)
 ans  =
    0.0086859

-->//Приближенное значение y'(x), x=50,55,60 (7.2)
```

```
-->Y=(dy-dy2(1:$-1)/2+dy3(1:$-2)/3)/h
 Y  =
    0.0086389    0.0079181    0.0073128
-->//Значение y'(x), x=50,55,60, для lg'(x)=1/ln(10)/x
-->(1/log(10))./x(1:$-1)
 ans  =
    0.0086859    0.0078963    0.0072382
```

Листинг 7.7

7.5. Вычисление производной функции в точке. Приближенное вычисление частных производных.

Более универсальной командой дифференцирования является команда

`g=numdiff(fun,x)`

Здесь `fun` - имя функции, задающей выражение для дифференцирования. Функция должна быть задана в виде `y=fun(x [,p1,p2,..pn])`, где `x` - переменная по которой будет проводится дифференцирование. Если параметры `p1,p2,..pn` присутствуют в описании функции, то должны быть обязательно определены при вызове, например так:

`g=numdiff(list(fun,p1,p2,..pn),x).`

Результат работы функции - матрица $g_{ij}=\frac{df_i}{dx_j}$.

Рассмотрим несколько примеров.

ЗАДАЧА 7.5. Вычислить $f'(1)$, если $f(x)=(x+2)^3+5x$. Решение показано в листинге 7.8.

```
-->function  f=my(x), f=(x+2)^3+5*x, endfunction;
-->numdiff(my,1)
 ans  =
32.
-->x=1;3*(x+2)^2+5
 ans  =
32.
```

Листинг 7.8

ЗАДАЧА 7.6. Вычислить $f'(x)$ в точках 0, 1, 2, 3 для $f(x)=(x+2)^3+5x$ (листинг 7.9).

```
-->v=0:3;
-->numdiff(my,v)
 ans  =
    17.    0.     0.           0.
    0.     32.    0.           0.
    0.     0.     52.999999    0.
    0.     0.     0.           80.000002
-->function  f1=my1(x), f1=3*(x+2)^2+5, endfunction;
-->my1(v)
 ans  =
    17.    32.    53.    80.
```

Листинг 7.9

ЗАДАЧА 7.7. Задана функция многих переменных $y(x_1, x_2, x_3)=x_1 x_2^{x_3}+x_1^2 x_3$. Вычислить

$\frac{dy}{dx_1}, \frac{dy}{dx_2}, \frac{dy}{dx_3}$ в точке (1, 2, 3). Листинг 7.10 содержит решение задачи.

```
-->function [Y]=f(X), Y=X(1)*X(2)^X(3)+X(1)^2*X(3),endfunction
-->X=[1 2 3];
-->numdiff(f,X)
 ans  =
    14.    12.    6.5451775
-->//--------------------------------
-->function [Y]=f1(X),
Y(1)=X(2)^X(3)+2*X(1)*X(3),
Y(2)=X(1)*X(3)*X(2)^(X(3)-1),
Y(3)=x(1)*X(2)^X(3)*log(X(2))+X(1)^2,
endfunction
-->f1(X)
 ans  =
    14.
    12.
    6.5451774
```

Листинг 7.10